

A.A. 2025
Precorso di Matematica
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Numeri interi: fattorizzazione, divisibilità, massimo comun divisore e minimo comune multiplo. Polinomi. Triangolo di Tartaglia.	5
Lezione 02. Teorema di Ruffini. Divisione di polinomi. Fattorizzazioni notevoli.	9
Lezione 03. Equazioni di primo e secondo grado. Equazioni riconducibili al secondo grado mediante cambi di variabile. Ricerca di radici razionali per polinomi. Equazioni polinomiali che si risolvono mediante fattorizzazione.	13
Lezione 04. Disequazioni di primo grado. Disequazioni di secondo grado: interpretazione in termini di fattorizzazione e grafico. Sistemi di disequazioni.	17
Lezione 05. Radicali e potenze frazionarie.	21
Lezione 06. Studio del segno di prodotti e quozienti sulla base del segno dei singoli fattori.	26
Lezione 07. Disequazioni fratte.	30
Lezione 08. Valore assoluto: definizione. Equazioni e disequazioni elementari con il valore assoluto. Ulteriori esempi di disequazioni che si riducono a prodotti e quozienti.	34
Lezione 09. Logaritmi: definizione operativa e principali proprietà. Esercizi sui logaritmi.	38
Lezione 10. Ulteriori esercizi sulle potenze. Equazioni con esponenziali e logaritmi.	43
Lezione 11. Disequazioni con esponenziali e logaritmi.	48
Lezione 12. Equazioni e disequazioni con radici e valori assoluti.	52
Lezione 13. Introduzione alla trigonometria: angoli vs archi, gradi vs radianti, funzioni trigonometriche, archi/angoli notevoli, archi associati.	56
Lezione 14. Formule trigonometriche classiche: addizione/sottrazione, duplicazione, product to sum, sum to product.	60
Lezione 15. Equazioni e disequazioni trigonometriche.	64
Lezione 16. Relazioni trigonometriche nei triangoli rettangoli. Introduzione alla risoluzione dei triangoli generali (teorema del seno, teorema del coseno, formula trigonometrica per l'area). Discussione dei tre scenari possibili.	69

Lezione 17. Equazione della retta nel piano cartesiano: significato geometrico dei coefficienti, rette parallele e perpendicolari, distanza di un punto da una retta. Asse di un segmento e bisettrici di un angolo.	74
Lezione 18. Equazione della circonferenza nel piano cartesiano. Significato geometrico dei coefficienti. Retta tangente in un punto. Condizione di tangenza tra una retta ed una circonferenza.	78
Lezione 19. Disegno di sottoinsiemi del piano descritti da sistemi di disequazioni. . . .	82
Lezione 20. Esercizi su parabole, ellissi, iperboli (in posizione canonica). Angoli al centro ed alla circonferenza. Dimostrazione del teorema dei seni.	86

PRECORSO 2025 — LEZIONE 01

Note Title

15/09/2025

Esempi sulle frazioni Se $\frac{a}{b} = 3$ e $a+b=5$, trovare a e b

$$a = 3b \leadsto 3b+b=5 \leadsto 4b=5 \leadsto b=\frac{5}{4} \leadsto a=\frac{15}{4}$$

Se $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{3}{2}$, trovare b

$$\downarrow$$

$$2a = a+b \leadsto a=b \leadsto b = \frac{3}{2}$$

Alternativa: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+b} = \frac{1}{2} \leadsto \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3+2b}{2}} = \frac{1}{2} \leadsto \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3+2b} = \frac{1}{2}$

$$6 = 3+2b \leadsto 2b=3 \leadsto b = \frac{3}{2} \quad \text{☺}$$

Aritmetica ① Fattorizzare 2025

$$\begin{array}{r|l} 2025 & 5 \\ 405 & 5 \\ 81 & 9^2 \end{array}$$

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2 = (3^2 \cdot 5)^2 = 45^2$$

Fatto utile: un numero è divisibile per 3 (o per 9) se e solo se la somma delle cifre è divisibile per 3 (o per 9)

② $(71064)^2$ è divisibile per 72

1° modo: elevo al 2 e faccio la divisione ☺

2° modo: $72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$, quindi mi basta che 71064 sia divisibile per 4 e per 3 (a quel punto sarà div. anche per 144).

Fatto: un numero è divisibile per 4 $\Leftrightarrow$ le ultime 2 cifre formano un numero divisibile per 4

$$71064 = 71000 + 64$$

$\uparrow$ div. per 4 $\uparrow$ div. per 4
 div. per 8 div. per 8

③ Scrivere in ordine crescente i divisori positivi di 24

Risposta: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Un divisore sarà $2^a \cdot 3^b$ con $24 = 2^3 \cdot 3$

$0 \leq a \leq 3$ e $0 \leq b \leq 1$
 4 valori 2 valori

④ MCD e mcm di 18 e 24

$$\text{MCD} = 6$$

$$\text{mcm} = 72$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

MCD = per ogni primo l'esponente minimo $2^1 \cdot 3^1$

mcm = " " " " massimo $2^3 \cdot 3^2$

Se i numeri sono

20	36	54
$2^2 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3^3$

$$\text{MCD} = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$$

$$\text{mcm} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$$

⑤ Qual è la massima potenza di 3 che divide $72^3 \cdot 57 \cdot 2025$

$$72 = \dots \cdot 3^2 \rightsquigarrow 72^3 = \dots \cdot 3^6 \quad 57 = 3 \cdot 19 \quad 2025 = 3^4 \cdot 5^2$$

Quindi alla fine il 3 compare 11 volte.

POLINOMI

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

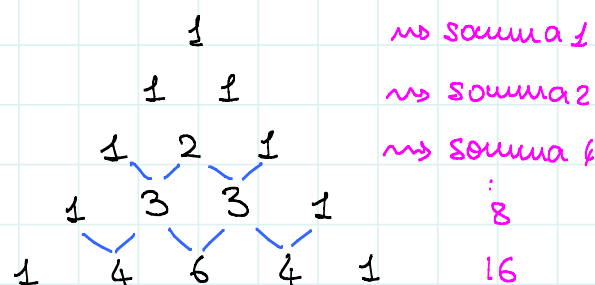
$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Triangolo di TARTAGLIA

(Pascal nel resto del mondo)



Ai lati c'è 1, più interno c'è l'esponente $(a+b)^m$, ancora più interno

$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} \quad \text{corso di aritmetica}$$

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{tutti i quadrati}} + \underbrace{2ab+2bc+2ca}_{\text{tutti i doppi prodotti}}$$

$x \cdot (x+1)^{100}$ e voglio scriverlo come $a+bx+cx^2+dx^3+\dots$
chi sono a, b, c, d ?

$$x(1+100x+4950x^2+\dots) = x+100x^2+4950x^3+\dots$$

$$\uparrow$$

$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99 = 50 \cdot 100 - 50$$

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) = ((x^2+1)+x)((x^2+1)-x) = (x^2+1)^2 - x^2$$

$$\quad \quad \quad A+B \quad \quad A-B \quad \quad = \quad A^2 - B^2$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$$

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3) &= (x^2+3x+2)(x+3) \\ &= x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6 \\ &= x^3+6x^2+11x+6\end{aligned}$$

$$(x+a)(x+b) = x^2+bx+ax+ab = x^2+(a+b)x+ab$$

$$\text{Analogamente: } (x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$$

Fatto generale: per un'eq. di 2° grado del tipo

$$x^2 + Ax + B = 0$$

vale che $\rightarrow B$ è il prodotto delle radici

$\rightarrow A$ è la somma con il segno cambiato

Esercizio Trovare due numeri con somma 5 e prodotto 6

$$\leadsto \text{Risolvo } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \leadsto x=2 \text{ e } x=3$$

— 0 — 0 —

PRECORSO 2025 - LEZIONE 02

Note Title

15/09/2025

DIVISIONE DI POLINOMI

Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$,
esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$
tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 quoziente resto

$$\text{e } \deg(R(x)) < \deg(B(x))$$

I polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ si calcolano con la divisione di polinomi

CASO SPECIALE: TEOREMA DI RUFFINI

Se $B(x) = (x-a)$, allora (il resto avrà grado 0, quindi sarà
un numero, e questo numero è $A(a)$)

$$A(x) = (x-a)Q(x) + A(a)$$

Dim. Per le proprietà della divisione deve essere

$$A(x) = (x-a) \cdot Q(x) + \text{numero}$$

$\uparrow$
 pol. di grado 0

Sostituendo $x = a$ trovo numero = $A(a)$

Conseguenza: se $P(a) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per $x-a$

Morale: trovare le radici e fattorizzare sono parenti.

Esercizi sulla divisione

① Dividere $x^4 + 3x^3 + 1$ per $x^2 - 2$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 3x^3 + 1 & x^2 - 2 \\
 \underline{-x^4 + 2x^2} & x^2 + 3x + 2 \\
 3x^3 + 2x^2 + 1 & Q(x) \\
 \underline{-3x^3 + 6x} & \\
 2x^2 + 6x + 1 & \\
 \underline{-2x^2 + 4} & \\
 6x + 5 & R(x)
 \end{array}$$

Se ho fatto bene i conti:

$$(x^4 + 3x^3 + 1) = (x^2 - 2)(x^2 + 3x + 2) + 6x + 5$$

↑ verificare moltiplicando

② $x^4 + 3x + 7$ diviso $x^2 + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 3x + 7 & x^2 + 1 \\
 \underline{-x^4 - x^2} & x^2 - 1 \\
 -x^2 + 3x + 7 & \\
 \underline{x^2 + 1} & \\
 3x + 8 &
 \end{array}$$

[Riascoltare tra 2 mesi]

Questo vuol dire che $x^4 + 3x + 7 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 3x + 8$

③ $x^4 + 3x + 7$ diviso $x + 2$ Quanto fa il resto?

Fa 17! RUFFINI: $\underline{x^4 + 3x + 7} = (x + 2)Q(x) + A(-2)$
A(x)

1 $x^2 - 1$ diviso $x + 1$

$$(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1) + 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

2 $x^4 - 1$ diviso $x + 1$

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) \\ &= \underbrace{(x^2 + 1)(x - 1)}_{\mathbb{Q}(x)}(x + 1) \end{aligned}$$

3 $x^4 + 1$ diviso $x^2 + 1$

$$\begin{array}{r} x^4 + 1 \mid x^2 + 1 \\ -x^4 - x^2 \quad \underline{x^2 - 1} \\ -x^2 + 1 \quad \quad \uparrow \mathbb{Q} \\ x^2 + 1 \\ \hline 2 \leftarrow \mathbb{R} \end{array}$$

$$(x^4 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2$$

4 $x^3 + 1$ diviso $x + 1$

$$x^3 + 1 = (x + 1) \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\mathbb{Q}} + \underbrace{0}_{\mathbb{R}}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

e così via su tutti i gradi dispari

Con gli esponenti pari funziona solo quella con il segno -

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Esercizio: provare a moltiplicare bovinamente

$$x^2 + 1$$

$$x^4 + 1 \quad \leadsto \text{NULLA DI FURBO}$$

$$x^6 + 1$$

5 $x^5 + 1$ diviso $x^3 + 2x^2$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 1 \\
 - x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 -2x^4 + 1 \\
 + 2x^4 + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 1 \\
 - 4x^3 - 8x^2 \\
 \hline
 -8x^2 + 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 4 \\
 \hline
 Q(x)
 \end{array}$$

$R(x)$

~ FARE LA VERIFICA

6 $x^6 - 1$ diviso $x - 1$

$$\begin{array}{l}
 x^2 - 1 \\
 x^3 - 1
 \end{array}$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \rightarrow \text{scomposizioni sopra}$$

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) \quad A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) \quad A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A = x^2 \quad e \quad B = 1$$

$$x^{2025} - 1 \text{ diviso } x^{405} - 1 \quad \dots \quad y = x^{405}$$

$$\begin{array}{l}
 x^{2025} - 1 = (x^{405} - 1)(x^{1620} + x^{1215} + x^{810} + x^{405} + 1) \\
 y^5 - 1 = (y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)
 \end{array}$$

7 $3x^6 + 2x^4$ diviso $x^3 - 3x^2$

$$\begin{array}{r}
 3x^6 + 2x^4 \\
 - 3x^6 + 9x^5 \\
 \hline
 9x^5 + 2x^4 \\
 - 9x^5 + 27x^4 \\
 \hline
 29x^4 \\
 - 29x^4 + 87x^3 \\
 \hline
 87x^3 \\
 - 87x^3 + 261x^2 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 3x^3 + 9x^2 + 29x + 87 \\
 \hline
 Q(x)
 \end{array}$$

$R(x)$

Potero raccogliere x^2
ovunque e poi
moltiplicare alla fine

PRECORSO 2025 - LEZIONE 03

Note Title

15/09/2025

EQUAZIONI DI PRIMO / SECONDO GRADO E RICONDUCEBILI

$$\textcircled{1} \quad -x-3=0 \rightsquigarrow x=-3$$

$$2x-8=0 \rightsquigarrow 2x=8 \rightsquigarrow x=4$$

$$\textcircled{2} \quad 2x^2-8x=0 \quad 2x^2=8x \rightsquigarrow x^2=4x \rightsquigarrow x=4 \quad \text{NO!}$$

$$\rightsquigarrow x^2-4x=0 \rightsquigarrow x(x-4)=0 \rightsquigarrow x=0 \rightsquigarrow x=0$$

$$\rightsquigarrow x-4=0 \rightsquigarrow x=4$$

$$\textcircled{3} \quad x^2-7x+12=0 \rightsquigarrow (x-3)(x-4)=0 \rightsquigarrow x=3 \text{ opp. } x=4$$

$$2x^2+5x-3=0 \rightsquigarrow x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

$$\text{Somma} = -\frac{5}{2} \quad \text{Prodotto} = -\frac{3}{2} \quad x=-3 \text{ e } x=-\frac{1}{2}$$

$$\text{Alternativa} \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -\frac{12}{4} = -3 \end{matrix} \quad \therefore$$

$$\textcircled{4} \quad -4x^2+12x-9=0 \rightsquigarrow 4x^2-12x+9=0 \rightsquigarrow (2x-3)^2 \rightsquigarrow x=\frac{3}{2}$$

Radice di molteplicità 2 $\rightsquigarrow$ discriminante = 0

$$x^2-4x+2025=0 \quad x=2 \pm \sqrt{4-2025}$$

$\rightsquigarrow$ nessuna radice reale

Eq. di 2° grado

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Versione ridotta

$$ax^2 + 2\beta x + c = 0$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Dim $ax^2 + bx + c = 0 \rightsquigarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$\rightsquigarrow \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\rightsquigarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$\rightsquigarrow$ faccio la radice e poi ricavo x

⑤ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 2 \\ \rightsquigarrow x^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}} \right\} 4 \text{ soluzioni}$$

⑥ $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ x^2 + 4 = 0 \quad x^2 - 1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \\ \text{nulla in } \mathbb{R} \quad x = \pm 1 \\ \quad \quad \quad \underline{2 \text{ soluz. reali}} \end{array}$$

⑦ $x^4 - 3x^2 = 0$

$$\begin{array}{l} x^2(x^2 - 3) \\ \downarrow \quad \rightsquigarrow \\ \underline{x = 0 \quad x = \pm \sqrt{3}} \end{array}$$

3 radici reali

(di cui una di molteplicità 2)

⑧ $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ $(x^2 - 2)^2 = 0$
 $x = \pm\sqrt{2}$ (ciascuna delle 2 ha molteplicità 2)

⑨ $(x^4 + 1)(x^2 + 2x) = 0$ $\leadsto x(x+2) = 0$
 $\uparrow$
 non si annulla $\leadsto x = 0$ e $x = -2$

⑩ $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$ $(x^3 + 2)(x^3 + 3) = 0$

$\leadsto x^3 + 2 = 0 \quad \leadsto x^3 = -2 \quad \leadsto x = -\sqrt[3]{2}$
 $\leadsto x^3 + 3 = 0 \quad \leadsto x^3 = -3 \quad \leadsto x = -\sqrt[3]{3}$

Fattorizzare $x^3 + 2$

$x^3 + 2 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$
 $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 $a = x \quad b = \sqrt[3]{2}$

⑪ $x^3 - 2x + 1 = 0$

Si vede ad occhio la radice $x = 1$. Ruffini: posso dividere per $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x + 1 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & x^2 + x - 1 \\ \hline x^2 - 2x + 1 & \\ -x^2 + x & \\ \hline -x + 1 & \\ x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Quindi $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$

$x - 1 = 0 \leadsto x = 1$
 $\leadsto x^2 + x - 1 = 0 \leadsto x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Quindi 3 radici reali

⑫ $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ Possibili radici razionali: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
 Se uno di questi è radice, divido e scendo di grado
 Altrimenti 😞 non è più percorso

FATTO GENERALE (Criterio della radice razionale)

Se un polinomio $P(x)$ a coeff. interi ha una radice razionale $\frac{m}{n}$ con m ed n interi (già semplificata) allora

→ m divide il termine noto

→ n divide il coeff. del termine di grado max.

Nell'esempio le radici sono $-1, 2, +3$.

⑬ $x^{100} + x^2 + 1 = 0$ è sempre ≥ 1 per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi
NO radici reali

⑭ $x^4 - x^3 + 1 = 0$ Le uniche razionali possibili sono ± 1
e non vanno bene ;)

Dico che non ha radici reali.

1° modo Può essere $x \leq 0$? NO, perché $P(x) \geq 1$ per ogni $x \leq 0$

Può essere $x \geq 1$? NO, perché

$$x^4 - x^3 + 1 = \underbrace{x^3}_{+} \underbrace{(x-1)}_{\geq 0} + 1 \geq 1 \text{ per ogni } x \geq 1$$

Può essere $x \in (0, 1)$? NO, perché $x^4 + (1 - x^3) \geq x^4 > 0$

$$= x^4 + \underbrace{(1-x)}_{+} \underbrace{(1+x+x^2)}_{+}$$

In realtà non c'è un secondo modo immediato

— 0 — 0 —

PRECORSO 2025 — LEZIONE 04

Note Title

15/09/2025

DISEQUAZIONI Obiettivo generale: data una funzione $f(x)$, suddividere $\mathbb{R}$ in quattro sottoinsiemi disgiunti

→ gli x per cui $f(x) = 0$

→ " $f(x) > 0$

→ " $f(x) < 0$

→ gli x per cui non ha senso calcolare $f(x)$ per colpa di problemi burocratici (tipo denominatori nulli)

Primo grado ACHTUNG! Non incastrarsi con i segni

$$\textcircled{1} \quad 3x \geq 2 \quad \rightsquigarrow \quad x \geq \frac{2}{3}$$

$$3x \geq -2 \quad \rightsquigarrow \quad x \geq -\frac{2}{3}$$

$$-3x \geq 2 \quad \rightsquigarrow \quad x \leq -\frac{2}{3}$$

$$-3x \geq -2 \quad \rightsquigarrow \quad x \leq \frac{2}{3}$$

$$-2 \geq 3x \quad \rightsquigarrow \quad x \leq -\frac{2}{3}$$

Quando moltiplico o divido per cosa negativa devo girare i segni

$$\textcircled{2} \quad 2(x+1) + x \leq 3x+2 \quad 2x+2+x \leq 3x+2 \quad 3x+2 \leq 3x+2$$

Questa è sempre verificata

$$0 \leq 0 \quad \text{☺}$$

Occhio! $7 \geq 5$ e $7 \geq 7$ sono vere

$$2(x+1) + x < 3x+2 \quad \rightsquigarrow \quad 3x+2 < 3x+2 \quad \rightsquigarrow \quad 0 < 0 \quad \text{?}$$

Mai verificata

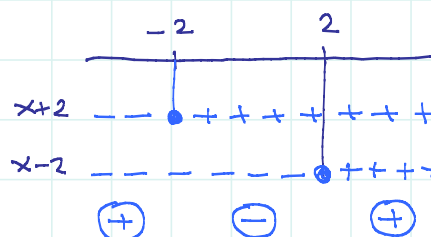
$$-3x-1 \leq -7+x \quad \rightsquigarrow \quad 4x \geq 6 \quad \rightsquigarrow \quad x \geq \frac{3}{2}$$

Secondo grado

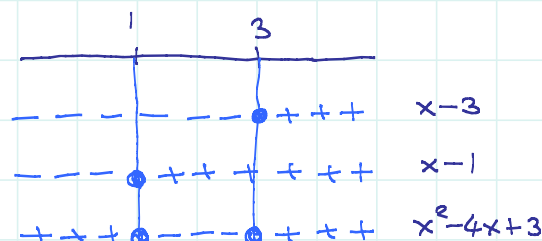
① $x^2 \leq 4 \quad \leadsto \quad x \leq \pm 2 \quad \text{NO, PLEASE}$
 $\leadsto -2 \leq x \leq 2 \quad \text{oppure} \quad x \in [-2, 2]$

Si pensa da $x^2 - 4 \leq 0 \leadsto$ radici $x=2$ e $x=-2$
 $\leadsto$ valori interni

Perché? $(x+2)(x-2) \leq 0$

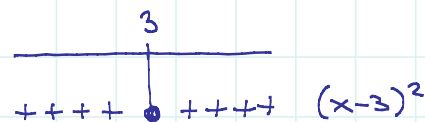


② $x^2 - 4x + 3$ Studio il segno
 $(x-3)(x-1)$



③ $-x^2 \geq x \quad \text{Nemmeno pensare di dividere}$
 $x^2 + x \leq 0 \quad \leadsto \quad x(x+1) \leq 0 \quad \leadsto \text{radici } x=-1 \text{ e } x=0$
 $\leadsto$ valori interni $x \in [-1, 0]$

④ $x^2 - 6x + 9 \quad (x-3)^2$



⑤ $-4x^2 - 4x - 1 \geq 0 \quad \leadsto \quad 4x^2 + 4x + 1 \leq 0 \quad \leadsto \quad (2x+1)^2 \leq 0$
 $\leadsto \quad x = -\frac{1}{2} \quad x \in \{-\frac{1}{2}\}$

Quando il discriminante è negativo non ci sono annullamenti, quindi è sempre + o sempre - a seconda del coeff. di x^2

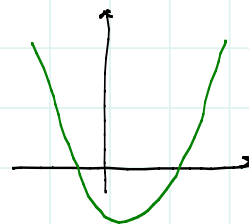
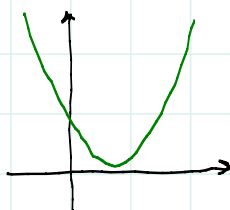
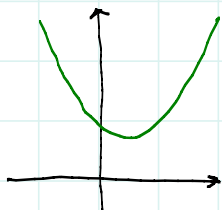
$$\textcircled{6} \quad -x^2 + 3x - 2025 \leq 0 \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8100}}{-2}$$

nessuna radice reale $\leadsto$ sempre < 0 $\leadsto$ sempre verificata

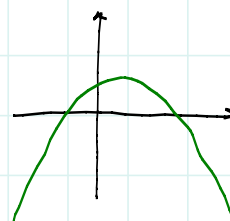
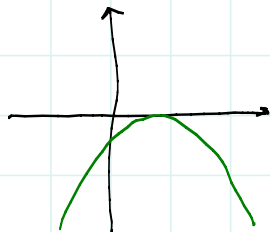
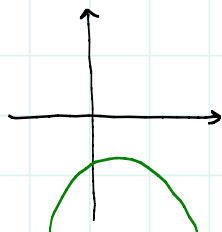
Interpretazione grafica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



$$b^2 - 4ac < 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$\textcircled{7} \quad 2x^2 \geq 1 \quad \leadsto \quad 2x^2 - 1 \geq 0 \quad \leadsto \text{radici: } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) \geq 0$$

$$\text{Soluzione: } (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

$$\textcircled{8} \quad (x+2)^2 > x \quad \leadsto \quad x^2 + 4x + 4 > x \quad \leadsto \quad x^2 + 3x + 4 > 0$$

$$\text{Radici: } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

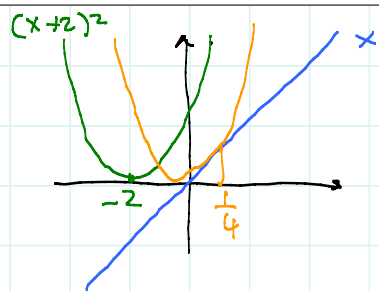
$\Delta < 0 \leadsto$ sempre > 0
 $\leadsto$ sempre verificata

$$(x + \frac{1}{4})^2 > x \quad \leadsto \quad x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} > x \quad \leadsto \quad x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} > 0$$

$$\leadsto 16x^2 - 8x + 1 > 0$$

$$(4x - 1)^2 > 0$$

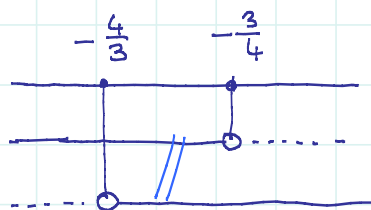
$$\text{Soluzione: } x \neq \frac{1}{4}$$



SISTEMI DI DISEQUAZIONI

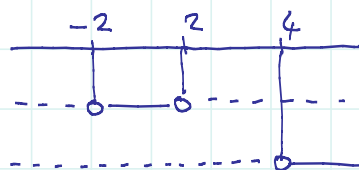
Devono essere tutte verificate contemporaneamente

$$\textcircled{1} \begin{cases} -4x > 3 \\ -3x < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\frac{3}{4} \\ x > -\frac{4}{3} \end{cases}$$



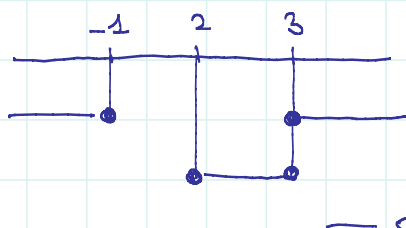
Soluzione del sistema: $x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right)$ $-\frac{4}{3} < x < -\frac{3}{4}$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-2, 2) \\ x > 4 \end{cases}$$



Nessuna soluzione

$$\textcircled{3} \begin{cases} x^2 - 2x \geq 3 \\ x^2 + 6 \leq 5x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ (x-2)(x-3) \leq 0 \end{cases}$$



Soluzione: solo $x = 3$
 $\{3\}$

PRECORSO 2025 - LEZIONE 05

Note Title

16/09/2025

RADICALI E POTENZE FRAZIONARIE

$$a^b$$

$\nwarrow$ esponente
 $\nearrow$ base

a^n con n intero positivo : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \quad a \in \mathbb{R}$

Principali proprietà

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n \rightsquigarrow a \text{ compare } m+n \text{ volte}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Esempio $(a^2)^3 = (a \cdot a)^3 = \underbrace{(a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a)}_{\text{in tutto 6 volte}}$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Esempio $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a^3 \cdot b^3$

$$(a \pm b)^n = \text{utente di furbo}$$

Esponente intero negativo: $a^{-s} = \frac{1}{a^s} \quad a \neq 0$

In questo modo continua a essere vero che $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ anche se m ed n non sono più positivi

Esempi $a^2 \cdot a^{-5} = \cancel{a} \cdot \cancel{a} \frac{1}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{-3} = a^{2-5}$

EspONENTE razionale: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a > 0$

EspONENTE reale: diventa più difficile da definire, ma restano vere sempre le stesse proprietà

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad a > 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad a > 0 \quad " \quad "$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \quad a > 0 \quad b > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Da queste si deduce anche $a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y} = a^x \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}$

Occhio! $2^{2^3} = 2^8 \quad (2^2)^3 = 2^6 \quad \text{per convenzione}$

Esercizi ① $\sqrt{a} = 2$
 $a = 4$

$$\sqrt[9]{9} = 3$$

 $a = 2$

$$a^{\frac{1}{2}} = 2 \rightsquigarrow \text{elevo al } 2: (a^{\frac{1}{2}})^2 = 2^2 \rightsquigarrow a = 4$$

$$9^{\frac{1}{a}} = 3 \rightsquigarrow (3^2)^{\frac{1}{a}} = 3 \rightsquigarrow 3^{\frac{2}{a}} = 3 \rightsquigarrow \frac{2}{a} = 1 \rightsquigarrow a = 2$$

② $\sqrt[9]{16} = 2$
 $a = 4$

$$\sqrt[9]{16} = 4 \quad 4^{\frac{2}{9}} = 4$$

 $a = 2$

③ $\sqrt[4]{a} = 3$
 $a = 81$

$$a^{\frac{1}{2}} = 5$$

 $a = 25$

$$a^{\frac{1}{4}} = 3 \rightsquigarrow \text{elevo alla quarta}$$

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = 5^2 \rightsquigarrow a = 5^2$$

$$\textcircled{4} \quad a^{3/2} = 27$$

$$a = 9$$

$$a^{-1/2} = \frac{1}{4}$$

$$a = 16$$

$$a^{3/2} = 3^3 \rightsquigarrow \text{elevo alla } \frac{2}{3} : a = (3^3)^{2/3} = 3^2 = 9$$

$$a^{-1/2} = \frac{1}{a^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{4} \rightsquigarrow \sqrt{a} = 4 \rightsquigarrow a = 16$$

$$\textcircled{5} \quad 2^{-a} = \frac{1}{8} \quad a = 3$$

$$8^a = 4 \quad a = \frac{2}{3}$$

$$2^{-a} = \frac{1}{2^a} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$(2^3)^a = 2^2 \rightsquigarrow 2^{3a} = 2^2$$

$$\textcircled{6} \quad \sqrt[a]{16} = 8 \quad a = \frac{4}{3}$$

$$2^{20} - 2^{19} = 2^a \quad a = 19$$

$$(2^4)^{1/a} = 2^3 \rightsquigarrow 2^{4/a} = 2^3$$

$$2^{20} = 2^{1+19} = 2^1 \cdot 2^{19} = 2 \cdot 2^{19}$$

$$\rightsquigarrow \frac{4}{a} = 3 \rightsquigarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\textcircled{7} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a} \quad a = 4$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{a} \quad a = 10$$

$$2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = (2 \cdot 2)^{1/2}$$

$$2^{1/2} \cdot 5^{1/2} = (2 \cdot 5)^{1/2}$$

$$\textcircled{8} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[a]{6} \quad a = 2$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{a} \quad a = 36$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} = \sqrt[4]{a}$$

$$\rightsquigarrow a^{1/4} = 6^{1/2} \rightsquigarrow \text{elevo alla } 4$$

$$\textcircled{9} \quad \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[a]{2} \quad a = 4$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[a]{2} \quad a = 6$$

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{1/2}} = (2^{1/2})^{1/2} = 2^{1/4}$$

$$(2^{1/3})^{1/2} = 2^{1/3 \cdot 1/2} = 2^{1/6}$$

$$\textcircled{10} \quad \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{a} \quad a=3 \qquad \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{a} \quad a=4$$

$$\left[(3^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$2^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}} \rightsquigarrow \text{elevo alla 8: } a = 2^2 = 4$$

$$\textcircled{11} \quad \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[a]{8} \quad a=4 \qquad \sqrt{4\sqrt{2}} = \sqrt{2^a} \quad a = \frac{5}{2}$$

$$2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$$

$$\text{Alternativa: } 2\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$4\sqrt{2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32} = 2^{\frac{5}{2}} \rightsquigarrow \sqrt{4\sqrt{2}} = 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{a}{2}}$$

$$\textcircled{12} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^a$$

$$2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 2^a \rightsquigarrow \text{trovo } a$$

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[a]{4}$$

$$2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{2}{a}} \rightsquigarrow a=4$$

$$\textcircled{13} \quad \sqrt[a]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$$

$$2^{\frac{1}{a} + \frac{1}{3}} = 2^1$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{3} = 1 \rightsquigarrow \text{trovo } a$$

$$\sqrt[3]{2} : \sqrt[a]{a} = 2^{-4} \quad a=256$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{2}$$

$$2^{\frac{1}{3} + 1} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$2^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{1}{6}} \rightsquigarrow \text{elevo alla 6}$$

$$2^8 = a$$

$$\textcircled{14} \quad \sqrt{3} \sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt[8]{a} \quad a = 9\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{9\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{4} = 2$$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{8}} = 2^1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{8} = 1 \rightsquigarrow a = 4$$

$$\textcircled{15} \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} = a\sqrt{2} \quad a = 2$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{a} \quad a = 8$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\textcircled{16} \quad \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{2^a} \cdot \sqrt[4]{8} = 8$$

$$2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{a}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^3$$

$$\frac{3}{2} + \frac{a}{3} + \frac{3}{4} = 3 \rightsquigarrow \text{trovo } a$$

$$\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{a} \quad a = 18$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$$

— 0 — 0 —

PRECORSO 2025 — LEZIONE 06

Note Title

16/09/2025

DISEQUAZIONI CON PRODOTTI E QUOZIENTI

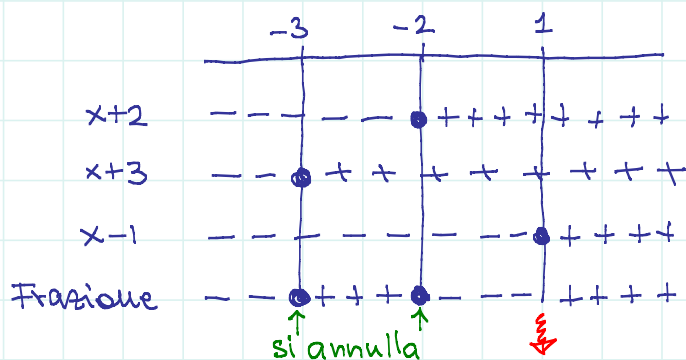
Obiettivo : studiare il segno di espressioni del tipo

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_m(x) \quad \frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_k(x)}$$

Metodo generale : studiare separatamente il segno dei diversi fattori, e poi trarne le conclusioni con la regola dei segni.

Esempio 1 $\frac{(x+2)(x+3)}{x-1} \leq 0$

In una prima fase ignoro la richiesta ≤ 0 e studio il segno in generale.



Ora, e solo ora, guardo la richiesta ≤ 0 e rispondo

$$(-\infty, -3] \cup [-2, 1)$$

↑ escluso

Esempio 2 $\frac{x+2}{x^2+1} > 0$
sempre > 0

Quindi è come se fosse $x+2 > 0 \leadsto x > -2 \quad (-2, +\infty)$

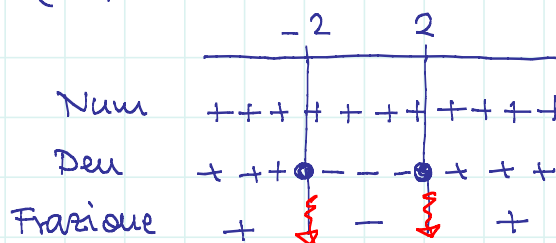
Esempio 3 $\frac{x^2+3}{x^2-4} \leq 0$

Numeratore sempre > 0 , quindi è come se fosse $x^2-4 \leq 0$

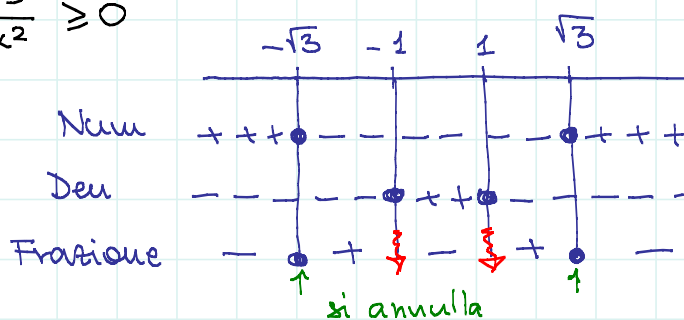
Radici: $\pm 2 \leadsto$ valori interni $[-2, 2]$

NO! Agli estremi si annulla il denominatore

La soluzione vera è $(-2, 2)$



Esempio 4 $\frac{x^2-3}{1-x^2} \geq 0$



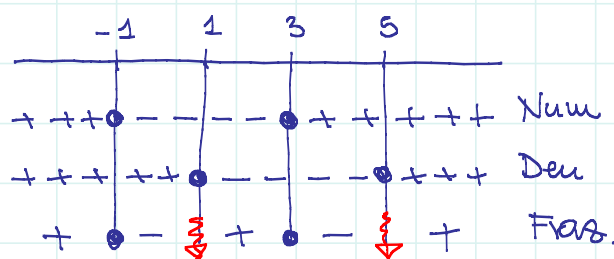
Soluzione: $[-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}]$

Esempio 5 $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+5} \leq 0$

$x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$

$x^2-6x+5 = (x-1)(x-5)$

$[-1, 1) \cup [3, 5)$

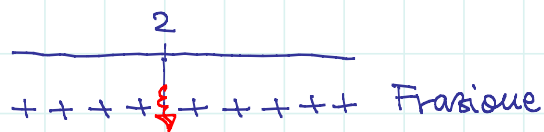


Esempio 6

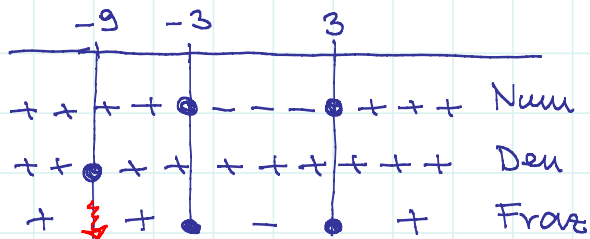
$$\frac{(x^2+4)(x^2+3)}{(x-2)^2} \geq 0$$

$$x \neq 2$$

$$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Esempio 7

$$\frac{x^2-9}{(x+9)^2} \geq 0$$



$$\text{Soluzione: } (-\infty, -9) \cup (-9, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$\text{Esempio 8 } (x+2)^3 \geq 0$$

$$\text{Esponente dispari: } A^3 \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0$$

$$\text{È come dire } x+2 > 0 \rightsquigarrow x > -2$$

$$(x+2)^{30} \geq 0 \rightsquigarrow \text{esponente pari} \rightsquigarrow \text{sempre} \geq 0 \quad \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{(x+2)^{30}} \geq 0 \rightsquigarrow x \neq -2$$

$$\frac{1}{(x+2)^{30}} > 0 \rightsquigarrow x \neq -2$$

$$\frac{1}{(x+2)^{33}} \geq 0 \rightsquigarrow x+2 > 0 \rightsquigarrow x > -2$$

(in $x = -2$ c'è il fulmine)

$$\frac{1}{(x+2)^{33}} > 0 \rightsquigarrow x+2 > 0 \rightsquigarrow x > -2$$

Esempio 9 $x^4 - 3 \leq 0$

Fatto generale: x^k con k pari positivo è "una specie di parabola"

↪ valori interni all'intervallo delle radici $-\sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}$

2° modo $x^4 - 3 = \underbrace{(x^2 + \sqrt{3})}_{\text{sempre } > 0} (x^2 - \sqrt{3})$

Quindi il segno di $x^4 - 3$ è lo stesso di $x^2 - \sqrt{3}$, quindi ≤ 0 per valori interni all'intervallo delle radici che sono

$$x = \pm \sqrt{\sqrt{3}} = \pm \sqrt[4]{3}$$

Con $x^8 - 3$ era uguale, se usi che cambiava l'indice della radice

$$x^8 - 3 = (x^4 + \sqrt{3})(x^4 - \sqrt{3}) = \underbrace{(x^4 + \sqrt{3})}_{> 0} \underbrace{(x^2 + \sqrt[4]{3})}_{> 0} (x^2 - \sqrt[4]{3})$$

Con $x^6 - 3$ viene

$$\begin{aligned} x^6 - 3 &= (x^3 + \sqrt{3})(x^3 - \sqrt{3}) & A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\ &= (x^2 - \sqrt[3]{3}) \underbrace{(x^4 + x^2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})}_{\text{tutto } > 0} & A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2 + AB + B^2) \\ &\quad \uparrow & A &= x^2 \quad B = \sqrt[3]{x} \\ &\text{il segno dipende solo da questo} \\ &\quad \quad \quad \underline{\quad 0 \quad - \quad 0 \quad -} \end{aligned}$$

PRECORSO 2025 - LEZIONE 07

Note Title

16/09/2025

Schema generale con potenze grandi (k intero)

$$[\text{Mostro}]^k \geq A$$

$\uparrow$ espressione $\uparrow$ numero

$$[\text{Mostro}]^k \leq A$$

k dispari $\text{Mostro} \geq A^{\frac{1}{k}}$ $\text{Mostro} \leq A^{\frac{1}{k}}$

k pari Se $A < 0$ la prima è sempre verificata, la seconda mai
 Se $A = 0$ " , la seconda

solo se $\text{Mostro} = 0$

Se $A > 0$ la seconda è verificata se e solo se

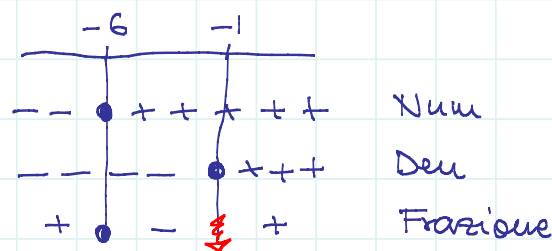
$$-A^{\frac{1}{k}} \leq \text{Mostro} \leq A^{\frac{1}{k}}$$

la prima per i corrispondenti valori estremi.

[Volevamo tutti i casi si dimostrano per fattorizzazione]

Esempio 1 $\frac{(x+6)^3}{x+1} \leq 0$

$[-6, -1)$



Esempio 2 $x^7 + 3 \geq 0$ $x^7 \geq -3 \rightsquigarrow x \geq (-3)^{\frac{1}{7}} = -\sqrt[7]{3}$

Stessa cosa con la fattorizzazione: per semplicità sia $a = \sqrt[7]{3}$

$$x^7 + 3 = x^7 + a^7 = (x+a) \underbrace{(x^6 - ax^5 + a^2x^4 - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6)}_{\text{sarebbe bello se fosse sempre } > 0}$$

Esempio 3 $(x^5+7)^{70} (x^7+5)^{60} \leq 0$

È tutta roba > 0 o nulla. L'unica caso buono è quando è nulla, cioè

$$x = -\sqrt[5]{7}$$

$$x = -\sqrt[7]{5}$$

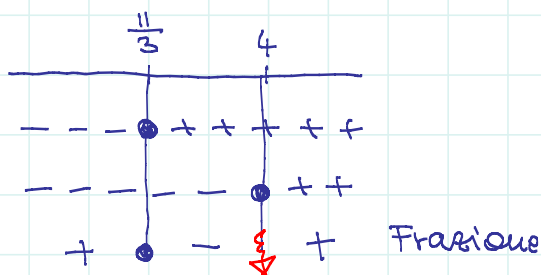
Esempio 4 $\frac{1}{x-4} \geq -3$

Non pensare nemmeno di moltiplicare per $x-4$!!

Infatti a seconda del suo segno dovrai cambiare o no il verso.

SLOGAN: portare tutto dalla stessa parte!

$$\frac{1}{x-4} + 3 \geq 0 \rightsquigarrow \frac{1+3x-12}{x-4} \geq 0 \rightsquigarrow \frac{3x-11}{x-4} \geq 0$$



Soluzione:

$$(-\infty, \frac{11}{3}] \cup (4, +\infty)$$

2° modo: VOGLIO MOLTIPLICARE

$$\begin{cases} x-4 > 0 \\ 1 \geq -3x+12 \end{cases}$$

↑
moltiplico e
conservo i versi

$$\begin{cases} x-4 < 0 \\ 1 \leq -3x+12 \end{cases}$$

↑
moltiplico e
cambio i versi

$$\begin{cases} x > 4 \\ x \geq \frac{11}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$

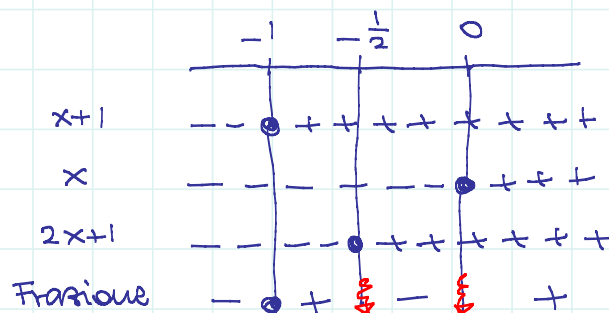
1° sistema $x > 4$

2° sistema $x \leq \frac{11}{3}$

Esempio 5 $\frac{1}{x} > \frac{1}{2x+1}$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+1} > 0 \rightsquigarrow \frac{2x+1-x}{x(2x+1)} > 0 \rightsquigarrow \frac{x+1}{x(2x+1)} > 0$$

$$(-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$$



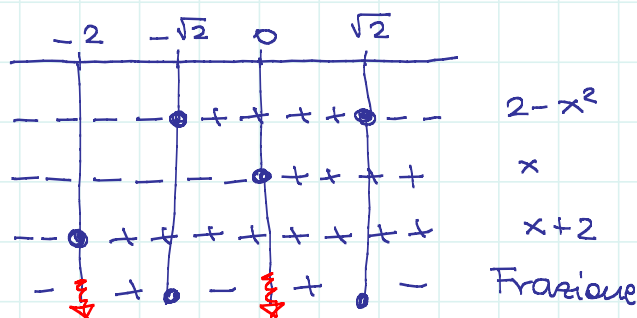
Esempio 6 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \geq 1$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{\cancel{x+2} + \cancel{x} - x^2 - 2x}{x(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2-x^2}{x(x+2)} \geq 0$$

$$(-2, -\sqrt{2}] \cup (0, \sqrt{2}]$$



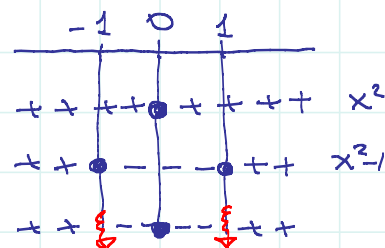
Esempio 7 $\frac{x^2}{x+1} \leq \frac{x^2}{x-1}$

Se tolgo gli x^2 , rischio di perdere $x=0$, che è una soluzione

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \leq 0 \rightsquigarrow \frac{x^2(x-1) - x^2(x+1)}{x^2-1} \leq 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{-2x^2}{x^2-1} \leq 0 \rightsquigarrow \frac{x^2}{x^2-1} \geq 0$$

↑
tolgo -2 e
cambio il
verso
(quindi moltiplico
per $-\frac{1}{2} < 0$)



La risposta è

$$(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$$

↑ togliendo x^2 si perdeva
la soluzione

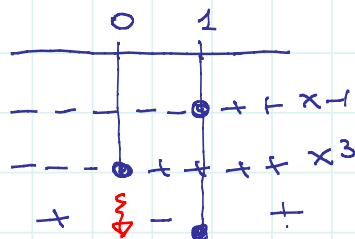
Esempio 8

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \leq 0$$

$$[0, 1]$$

$$\frac{x-1}{x^3} \leq 0$$



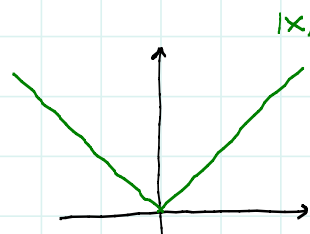
PRECORSO 2025 - LEZIONE 08

Note Title

16/09/2025

VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



In particolare : $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e
 $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$

Valore assoluto nelle equazioni

$| \text{Mostro} | = A \rightarrow$ se $A < 0$, NOPE (nessuna soluzione)
 $\rightarrow$ se $A = 0$, allora diventa $\text{Mostro} = 0$
 $\rightarrow$ se $A > 0$, allora diventa
 $\text{Mostro} = A$ e $\text{Mostro} = -A$

Esempi $|x-5| = 3$

$$x-5 > 3 \leadsto x=8$$

$$x-5 = -3 \leadsto x=+2$$

$$|x^2-3x| = 2$$

$$x^2-3x = 2 \leadsto x^2-3x-2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x^2-3x = -2 \leadsto x^2-3x+2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \leadsto x=1 \quad x=2$$

In tutto 4 soluzioni

$$|x^2-3x| = 0 \leadsto x^2-3x = 0 \leadsto x=0 \text{ e } x=3$$

Valore assoluto nelle disequazioni

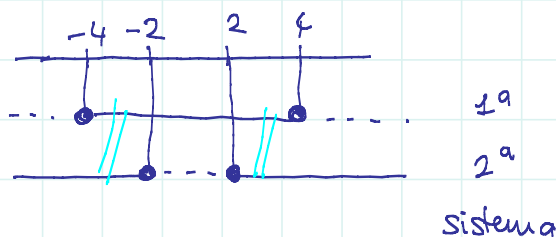
$|Mostro| \geq A \rightarrow$ Se $A \leq 0$, allora sempre verificata
(purché Mostro non abbia problemi)
 $\rightarrow$ Se $A > 0$, allora diventa
 $Mostro \geq A$ oppure $Mostro \leq -A$

$|Mostro| \leq A \rightarrow$ Se $A < 0$, allora NOPE
 $\rightarrow$ se $A = 0$, allora viene $Mostro = A$
 $\rightarrow$ se $A > 0$ allora diventa
 $-A \leq Mostro \leq A$
cioè il sistema
$$\begin{cases} Mostro \leq A \\ Mostro \geq -A \end{cases}$$

Esempi $|x^2 - 10| \leq 6 \rightsquigarrow -6 \leq x^2 - 10 \leq 6$

$$\begin{cases} x^2 - 10 \leq 6 \\ x^2 - 10 \geq -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq 16 \\ x^2 \geq 4 \end{cases}$$



Soluzione: $[-4, -2] \cup [2, 4]$

$|x - 3| \geq 7 \rightsquigarrow x - 3 \geq 7$ oppure $x - 3 \leq -7$
 $x \geq 10$ oppure $x \leq -4$

Soluzione $(-\infty, -4] \cup [10, +\infty)$

Esercizio

$$x^4 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

$$\Delta = 9 - 16 < 0$$

Quindi sempre > 0

Alternativa: $y = x^2 \rightsquigarrow y^2 - 3y + 4 \geq 0 \rightsquigarrow \Delta < 0$: sempre positivo per ogni y

$$x^4 - 3x^2 - 4 \leq 0$$

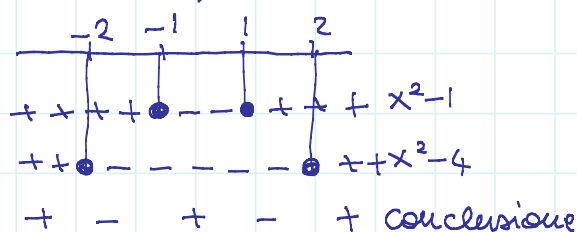
$$(x^2 + 1)(x^2 - 4) \leq 0 \rightsquigarrow x^2 - 4 \leq 0$$

$\downarrow$
sempre > 0

$$[-2, 2]$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0$$



Risposta: $[-2, -1] \cup [1, 2]$

$$x^6 + 4x^3 + 3 > 0$$

$$(x^3 + 3)(x^3 + 1) > 0$$

$$(-\infty, -\sqrt[3]{3}) \cup (-1, +\infty)$$

$$x^8 + 3x^4 \leq 0$$

$$x^4(x^4 + 3) \leq 0 \rightsquigarrow x = 0$$

$\uparrow$
sempre > 0

$$x^6 - 2x^3 + 1 \leq 0$$

$$(x^3 - 1)^2 \leq 0 \rightsquigarrow x^3 - 1 = 0 \rightsquigarrow x = 1$$

Esercizi plus $x^3 + x + 6 \geq 4x^2$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 \geq 0 \rightsquigarrow (x+1)(x-3)(x-2)$$

↑
vedo $x = -1$

vedo $x = 3$

vedo anche $x = 2$

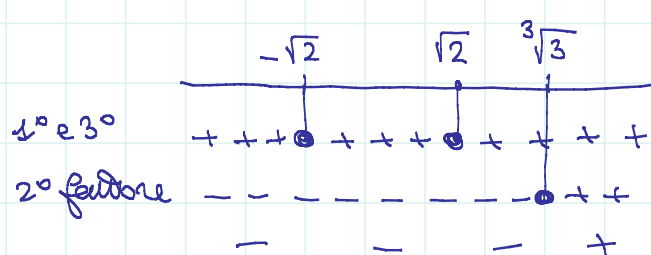
$\rightsquigarrow$ prodotto di 3 fattori

$$(x^2-2)^2(x^3-3)^3(x^4-4)^4 \geq 0$$

Il primo ed il terzo fattore sono ≥ 0 e si annullano in $\pm\sqrt{2}$

(entrambi: nota che $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$)

Il secondo fattore ha lo stesso segno di x^3-3



$$\sqrt[3]{3} \stackrel{?}{<} \sqrt{2}$$

elevo alla sesta

$$3^2 \stackrel{?}{<} 2^3$$

Soluzione: $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \cup [\sqrt[3]{3}, +\infty)$

Final one $(x^2+x+1)^{20} > x$

→ se $x < 0$, allora è vera gratis $(\dots)^{20} \geq 0 > \text{neg.}$

→ se $x = 0$ sostituisco ed è vera

→ se $0 < x < 1$, allora $(x^2+x+1)^{20} \geq 1^{20} > x$

→ se $x = 1$, allora sostituisco ed è vera

→ se $x > 1$, allora

$$(x^2+x+1)^{20} \geq x^{20} > x$$

↑
questa si risolve facile

(posso anche dividere per x)

— 0 — 0 —

PRECORSO 2025 - LEZIONE 09

Note Title

17/09/2025

LOGARITMI

$\log_a b$ = esponente a cui devo elevare a per ottenere b.

Detto altrimenti, se $a^x = b$ allora $x = \log_a b$

Si intende che

b = numero reale positivo
 a = numero reale positivo $\neq 1$

In particolare

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (a^b) = b$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a (b^c) = c \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a (b+c) = \text{nulla di furbo}$$

$$\log_a b \cdot \log_a c = \text{nulla di furbo}$$

Tutte le formule per i logaritmi seguono dalle corrispondenti formule per le potenze

Dim. della prima $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

Pongo $x = \log_a b$, $y = \log_a c$.

Per definizione $a^x = b$ e $a^y = c$. Ma allora

$$bc = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

↑
prop. potenze

Ma allora $x+y$ è l'esponente al quale elevare a per ottenere bc , quindi

$$\log_a(bc) = x+y$$

Dim. terza Devo dim. che $\log_a(b^c) = c \log_a b$

Come prima pongo $x = \log_a b$, quindi $b = a^x$

Ma allora

$$b^c = (a^x)^c = a^{cx}$$

↑
prop. potenze

Ma allora cx è l'esponente a cui elevare a per ottenere b^c .

Cambio di base Devo calcolare $\log_a b$, cioè risolvere $a^x = b$.

Faccio a dx e sx il log in base c :

$$\begin{aligned} \log_c(a^x) &= \log_c b \\ &= x \log_c a \end{aligned}$$

Ora non resta che ricavare $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

— o — o —

Casi speciali: $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$
 $a^1 = a$ $a^0 = 1$

Esercizi ① $\log_2 16 = a$

$\log_2 a = 3$

$\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

$\log_2 a = 3 \rightsquigarrow a = 8$

$\log_2 2^3 = 3$

② $\log_a 4 = 2 \quad a = 2$

$\log_3 (2^a) = a \log_3 2 \quad a = 4$

$\log_2 (2^2) = 2$

③ $\log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_3 2$

$\log_3 \sqrt{2} = \log_3 (2^{\frac{1}{2}})$

$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 (2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6) = \log_2 (2^{13}) = 13$

④ $\log_3 20 + \log_3 4 = \log_3 a$

$a = 80$

prodotto

$\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 a$

$a = 5$

divisione

⑤ $\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 a$

$a = \frac{3}{2}$

Divisione

$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 a$

$2 \cdot 3 = 6$

$\log_2 a = 6 \rightsquigarrow a = 2^6 = 64$

⑥ $2^{\log_2 a} = 9$

$a = 9$

$\log_2 (2^a) = 9$

$a = 9$

⑦ $2^{\log_4 a} = 9$

$\log_2 (4^a) = 9$

$\log_2 (4^a) = 9 \rightsquigarrow a \cdot \log_2 4 = 9 \rightsquigarrow 2a = 9 \rightsquigarrow a = \frac{9}{2}$

$2^{\log_4 a} = 9 \rightsquigarrow$ Faccio $\log_4$ a dx e sx

$\log_4 (2^{\log_4 a}) = \log_4 9 \rightsquigarrow \log_4 a \cdot \log_4 2 = \log_4 9$

$$(12) \log_7 13 \cdot \log_5 7 = \log_5 a \quad a = 13$$

↓
porto in base 5

$$\frac{\log_5 13}{\log_5 7} \cdot \log_5 7$$

$$\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a \quad \leadsto \text{andiamo in base 2}$$

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 49}{\log_2 8} = \log_2 a \quad \leadsto \frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{2 \cdot \log_2 7}{3} = \log_2 a$$

$$\leadsto \frac{2}{3} \log_2 3 = \log_2 a \quad \leadsto \log_2 3^{2/3} = \log_2 a$$

$$\leadsto a = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$$

$$(11) \log_7 2^{1000} = \log_{49} 2^a \quad \leadsto \text{andiamo in base 7}$$

$$1000 \cdot \log_7 2 = \frac{\log_7 2^a}{\log_7 49} = \frac{1}{2} \log_7 2^a$$

$$\log_7 2^a = 2000 \log_7 2 = \log_7 2^{2000} \quad \leadsto a = 2000$$

PRECORSO 2025 - LEZIONE 10

Note Title

17/09/2025

Esercizi sui raccoglimenti

$$(13) \quad 2^8 + 2^{20} = 2^8 (1 + 2^a) \quad a = 12$$

$$2^8 + 2^{20} = 2^8 \cdot 1 + 2^8 \cdot 2^{12}$$

$$(2^5 + 2^4)^2 = 2^{10} + 2^{14} + 2^{13}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(14) \quad \sqrt[3]{13\sqrt{13}} : \sqrt[4]{13\sqrt[5]{13}} = 13^a$$

$$\sqrt[3]{13^3} : \sqrt[4]{13^6} = 13^{\frac{3}{6}} : 13^{\frac{6}{20}} = 13^{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}} = 13^{\frac{1}{5}}$$

$$(5+1)^{20} = 5^{20} (1+5^a)^{20} \quad a = -1$$

$$(5+1)^{20} = \left(5\left(1+\frac{1}{5}\right)\right)^{20} = 5^{20} \left(1+\frac{1}{5}\right)^{20}$$

$$(ab)^{20} = a^{20} \cdot b^{20}$$

In alternativa: fare dall'inizio la radice 20-esima:

$$5+1 = 5(1+5^a) = 5+5^{a+1} \rightsquigarrow a+1=0 \rightsquigarrow a=-1$$

$$(15) \quad \sqrt[6]{13} + \sqrt[7]{13} = \sqrt[7]{13} (\sqrt[9]{13} + 1) \rightsquigarrow a = 42$$

$$\text{Espando a dx: } \sqrt[6]{13} + \cancel{\sqrt[7]{13}} = \cancel{\sqrt[7]{13}} + \sqrt[7]{13} \sqrt[9]{13}$$

$$\rightsquigarrow 13^{\frac{1}{6}} = 13^{\frac{1}{7} + \frac{1}{a}} \rightsquigarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{a} \rightsquigarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

$$\sqrt{7^4 + 7^5} = 49 \sqrt{1 + 7^a} \quad a = 1$$

$$\sqrt{7^4 + 7^5} = \sqrt{7^4(1+7)} = \sqrt{7^4} \cdot \sqrt{1+7} = 49 \sqrt{1+7}$$

$$(16) \quad \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 + 2^a} \quad \leadsto a = -\frac{1}{6}$$

Raccolgo $\sqrt{2}$ a sinistra: $\sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)}$

$$= \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 + \sqrt{a}} \quad a = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

— 0 — 0 —

EQUAZIONI CON ESPONENZIALI

Strategia: arrivare a scriverle come

$$\begin{array}{ccc} \text{CANE} & & \text{GATTO} \\ a & = & a \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{stessa base} & & \end{array}$$

A quel punto CANE = GATTO

EQUAZIONI CON LOGARITMI

Strategia: arrivare a scriverle come $\log_a \text{CANE} = \log_a \text{GATTO}$

$\nwarrow$ stessa base $\nearrow$

A quel p.to CANE = GATTO ma devo imporre CANE > 0
e GATTO > 0 (basta uno dei due essendo uguali)

Otteniamo quindi un sistema misto

$$\begin{cases} \text{GATTO} > 0 \\ \text{CANE} = \text{GATTO} \end{cases}$$

Esercizi ① $4 \cdot 2^{x^2} = 8^x$

Portiamo tutto in base 2: $2^2 \cdot 2^{x^2} = (2^3)^x$ cioè

$$2^{2+x^2} = 2^{3x} \quad \leadsto \quad 2+x^2=3x \quad \leadsto \quad x^2-3x+2=0$$

$$\leadsto \quad x=1 \quad \text{e} \quad x=2$$

② $3 \cdot 2^{x^2} = 1 \quad \leadsto \quad 2^{x^2} = \frac{1}{3}$

Per def. di logaritmo $x^2 = \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3^{-1} = -\log_2 3 < 0$
 $\leadsto$ Nessuna soluzione

Fatto generale: se $a > 1$, allora $\log_a 1 = 0$
 $\log_a x > 0$ se $x > 1$
 $\log_a x < 0$ se $x \in (0, 1)$

④ $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$ $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

Cerco di isolare 2^x : $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = 0$

Pongo $y = 2^x \leadsto y^2 - 4y + 3 = 0 \leadsto (y-3)(y-1) = 0$

$$\leadsto y=1 \quad \text{e} \quad y=3 \quad \leadsto \quad 2^x=1 \quad \text{e} \quad 2^x=3$$

$$\leadsto x=0 \quad \text{e} \quad x=\log_2 3$$

⑤ $2^x = 3^x$

1° modo Faccio a dx e sx il $\log_{||}$:

$$\log_{||} (2^x) = \log_{||} (3^x) \quad \leadsto \quad x \cdot \log_{||} 2 = x \cdot \log_{||} 3$$

$$x \underbrace{(\log_{||} 2 - \log_{||} 3)}_{\neq 0} = 0 \quad \leadsto \quad x = 0$$

2° modo Divido: $\frac{2^x}{3^x} = 1 \rightsquigarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

$$\rightsquigarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$$

⑥ $\log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) = 3$

$$\log_2 [(x+1)(x-1)] = 3 \rightsquigarrow \log_2 (x^2-1) = \log_2 8$$

$$\rightsquigarrow x^2-1=8 \rightsquigarrow x^2=9 \rightsquigarrow x = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightsquigarrow \text{OK} \\ \rightsquigarrow \text{NO perché} \\ \text{log (roba neg.)} \end{matrix}$$

⑦ $3 \log_3 x + 2 \log_3 (x^2) = 21$

$$3 \log_3 x + 4 \log_3 x = 21 \rightsquigarrow \log_3 x = 3 \rightsquigarrow x = 27$$

⑧ $[\log_2 (x+2)]^2 + 3 \log_2 (x+2) = 4$

$$y = \log_2 (x+2) \rightsquigarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \rightsquigarrow (y+4)(y-1) = 0$$

$$\rightsquigarrow y = -4 \quad \text{e} \quad y = 1 \rightsquigarrow \log_2 (x+2) = -4, \text{ cioè } x+2 = \frac{1}{16}$$

$$\rightsquigarrow \log_2 (x+2) = 1, \text{ cioè } x+2 = 2$$

⑨ $\log_2 \sqrt{x} \cdot \log_2 \sqrt[4]{x} = 2^{-1}$

$$\frac{1}{2} \log_2 x \cdot \frac{1}{4} \log_2 x = \frac{1}{2} \rightsquigarrow [\log_2 x]^2 = 4 \rightsquigarrow \log_2 x = \pm 2$$

$$\rightsquigarrow \log_2 x = 2 \rightsquigarrow x = 4$$

$$\rightsquigarrow \log_2 x = -2 \rightsquigarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{10} \log_2 x = \log_4 (6x)$$

Andiamo in base 2 :

$$\log_2 x = \frac{\log_2 (6x)}{\log_2 (4)} = \frac{\log_2 (6x)}{2} = \frac{1}{2} \log_2 (6x) = \log_2 \sqrt{6x}$$

$$\leadsto x = \sqrt{6x} \leadsto x^2 = 6x \leadsto x = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 6 \end{matrix} \begin{matrix} \leadsto \text{NO} \\ \leadsto \text{OK} \end{matrix}$$

— 0 — 0 —

PRECORSO 2025 — LEZIONE 11

Note Title

17/09/2025

DISEQUAZIONI CON ESPONENZIALI E LOGARITMI

$$\begin{array}{ccc} \text{CANE} & & \text{GATTO} \\ a & > & a \end{array} \rightsquigarrow \text{CANE} > \text{GATTO}$$

↑
ok se $a > 1$

(se $a \in (0, 1)$ $\rightsquigarrow$ CANE $<$ GATTO)

$$\log_a \text{CANE} > \log_a \text{GATTO} \rightsquigarrow \text{CANE} > \text{GATTO} > 0$$

↑
ok se $a > 1$

(se $a \in (0, 1)$ si inverte il verso)

Esercizi ① $2^{3x+1} \geq 4^{x-1}$

$$2^{3x+1} \geq 2^{2x-2} \rightsquigarrow 3x+1 \geq 2x-2 \rightsquigarrow x \geq -3 \quad \ddot{\smile}$$

② $25^{-x} \geq 5^{2x-3} \rightsquigarrow 5^{-2x} \geq 5^{2x-3} \rightsquigarrow -2x \geq 2x-3$

$$\rightsquigarrow 4x \leq 3 \rightsquigarrow x \leq \frac{3}{4}$$

Alternativa: $\frac{1}{25^x} \geq 5^{2x-3} \rightsquigarrow 1 \geq 25^x \cdot 5^{2x-3}$

↑
 $25^x > 0$ quindi
posso moltiplicare

$$\rightsquigarrow 1 \geq 5^{2x} \cdot 5^{2x-3} \rightsquigarrow 1 \geq 5^{4x-3} \rightsquigarrow 5^0 \geq 5^{4x-3} \rightsquigarrow \dots$$

③ $\underbrace{2^{x+4}}_{\text{sempre } > 0} \geq - \underbrace{\frac{1}{2^{x+5}}}_{\text{sempre } < 0}$

Vera per ogni $x \in \mathbb{R}$

Fatto generale : $\overset{\text{Mostro}}{a} > 0$ per ogni $a > 0$ e per ogni $\overset{\text{Mostro}}{x} \in \mathbb{R}$

④ $6^x \geq 2^x \cdot 3^{2x-1}$ $2^x \cdot 3^x \geq 2^x \cdot 3^{2x-1}$
posso perché $2^x > 0$ sempre
 $3^x \geq 3^{2x-1} \leadsto x \geq 2x-1 \leadsto x \leq 1$

⑤ $4 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^{x+1} \leq 4$ $4 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 3^x - 4 \leq 0$

Pongo $y = 3^x \leadsto 4y^2 + 15y - 4 \leq 0$

$$y = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8} = \frac{-15 \pm 17}{8} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{4} \\ \searrow -4 \end{matrix}$$

$\leadsto$ valori interni $-4 \leq y \leq \frac{1}{4}$, cioè $-4 \leq 3^x \leq \frac{1}{4}$
↑
GRATIS

resta $3^x \leq \frac{1}{4} \leadsto$ facciamo $\log_3$ a dx e sx

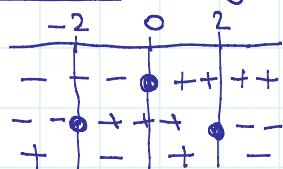
$$\log_3(3^x) \leq \log_3\left(\frac{1}{4}\right) \leadsto x \leq \log_3 \frac{1}{4} = -2 \log_3 2$$

In realtà è come fare $3^x \leq \frac{1}{4} = 3^{\log_3 \frac{1}{4}} \leadsto x \leq \log_3 \frac{1}{4}$

⑥ $4 \cdot 2^x - 8^x \geq 0$

1° modo $2^2 \cdot 2^x - (2^3)^x \geq 0 \leadsto 2^{2+x} - 2^{3x} \geq 0 \leadsto 2^{x+2} \geq 2^{3x}$
 $\leadsto x+2 \geq 3x \leadsto 2x \leq 2 \leadsto x \leq 1$

2° modo Pongo $y = 2^x \leadsto 4y - y^3 \geq 0 \leadsto y(4 - y^2) \geq 0$



y $\leadsto y \leq -2$ oppure $0 \leq y \leq 2$
 $4 - y^2$
 Prodotto

$2^x \leq -2$ oppure $0 \leq 2^x \leq 2$ $\leadsto 2^x \leq 2^1 \leadsto x \leq 1$
↑
MAI ↑
sempre

Con i logaritmi

$$\boxed{1} \quad \log_2(x+3) \leq 4 \rightsquigarrow \log_2(x+3) \leq \log_2 16$$

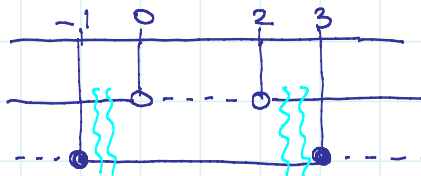
$$\rightsquigarrow \begin{matrix} 0 < x+3 \leq 16 \\ \uparrow \uparrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+3 \leq 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -3 \\ x \leq 13 \end{cases}$$

Soluzione: $[-3, 13]$

$$\boxed{2} \quad \log_3(x^2-2x) \leq 1 \rightsquigarrow \log_3(x^2-2x) \leq \log_3 3$$

$$\rightsquigarrow 0 < x^2-2x \leq 3 \rightsquigarrow \begin{cases} x^2-2x > 0 \\ x^2-2x \leq 3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x^2-2x > 0 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x < 0 \text{ oppure } x > 2 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Soluzione: $[-1, 0) \cup (2, 3]$

$$\boxed{3} \quad \log_7(3x-2) \geq \log_7(2x-3)$$

$$\rightsquigarrow 3x-2 \geq 2x-3 \downarrow \downarrow \quad \begin{cases} 3x-2 \geq 2x-3 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{Soluzione: } \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

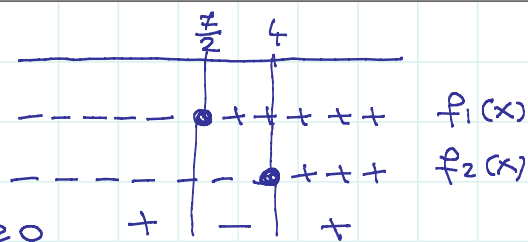
$$\boxed{4} \quad \log_2(x+1) + \log_2 x < 1$$

$$\log_2[x^2+x] < \log_2 2$$

$$\begin{cases} x^2+x < 2 \\ x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x-2 < 0 \\ \boxed{x > -1} \text{ INUTILE} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-2, 1) \\ x > 0 \end{cases} \rightsquigarrow x \in (0, 1) \quad 0 < x < 1$$

$$\boxed{5} \quad \underbrace{(2x-7)}_{f_1(x)} \underbrace{\log_3(x-3)}_{f_2(x)} \geq 0$$



Studio $f_2(x)$. Vediamo dove è ≥ 0

$$\log_3(x-3) \geq 0 \leadsto \log_3(x-3) \geq \log_3 1 \leadsto x-3 \geq 1 \stackrel{>0}{\leadsto} x \geq 4 \quad \text{GRATIS}$$

$$\text{Soluzione: } (-\infty, \frac{7}{2}] \cup [4, +\infty)$$

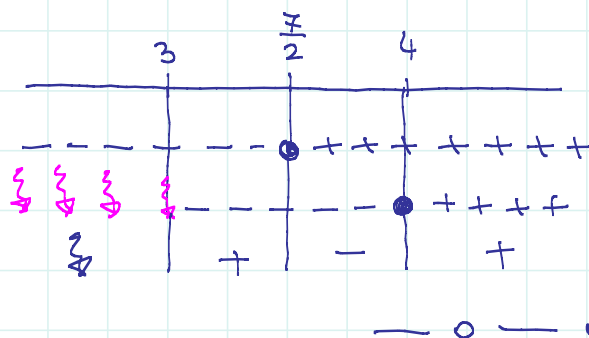
NO! NO! E POI NO!!!

Devo studiare anche $f_2(x) \leq 0$: $\log_3(x-3) \leq 0$

$$\leadsto \log_3(x-3) \leq \log_3 1 \leadsto 0 < x-3 \leq 1 \quad \text{NO GRATIS}$$

$$\leadsto \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 4 \end{cases} \leadsto (3, 4]$$

Quindi il vero grafico è



Soluzione vera:

$$(3, \frac{7}{2}] \cup [4, +\infty)$$

PRECORSO 2025 — LEZIONE 12

Note Title

17/09/2025

Equazioni con radici

$$\sqrt{\text{CANE}} = \text{GATTO} \rightsquigarrow \text{CANE} = \text{GATTO}^2$$

(dovrei imporre $\text{CANE} \geq 0$, ma è automatico dall'equazione)

Devo però imporre che $\text{GATTO} \geq 0$, quindi ho il sistema misto

$$\begin{cases} \text{CANE} = \text{GATTO}^2 \\ \text{GATTO} \geq 0 \end{cases}$$

Stessa cosa per tutti gli indici **PARI**

$$\sqrt[3]{\text{CANE}} = \text{GATTO} \rightsquigarrow \text{CANE} = \text{GATTO}^3 \text{ e basta}$$

Stessa cosa per tutti gli indici **DISPARI**

Esempio 1 $2x+3 = \sqrt{7x+18}$

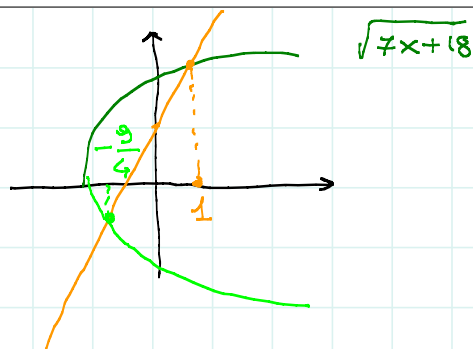
$$\begin{cases} (2x+3)^2 = 7x+18 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+12x+9 = 7x+18 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+5x-9 = 0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \frac{-5 \pm 13}{8} = \begin{matrix} \nearrow 1 \rightarrow \text{ok} \\ \searrow -\frac{9}{4} \rightarrow \text{NO: } -\frac{9}{2}+3 \geq 0 \text{ ?} \end{matrix}$$

Morale: fare il $\square$ ha aggiunto la soluzione ABUSIVA $x = -\frac{9}{4}$

$$\text{Per } x = -\frac{9}{4} \quad 2x+3 = -\frac{9}{2}+3 = -\frac{3}{2} \quad 7x+18 = -\frac{63}{4}+18 = \frac{9}{4}$$

Graficamente:



Diseguaglianze con RADICI

$$\sqrt[3]{\text{CANE}} \geq \text{GATTO} \leadsto \text{CANE} \geq \text{GATTO}^3$$

e stessa cosa con $\leq$ o altre potenze dispari

$$\sqrt{\text{CANE}} \leq \text{GATTO}$$

$$\begin{cases} \text{CANE} \leq \text{GATTO}^2 \\ \text{CANE} \geq 0 \\ \text{GATTO} \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\text{CANE}} \geq \text{GATTO}$$

$$\begin{cases} \text{CANE} \geq \text{GATTO}^2 \\ \text{GATTO} \geq 0 \\ \text{CANE} \geq 0 \leftarrow \text{GRATIS} \end{cases}$$

Unione

$$\begin{cases} \text{GATTO} \leq 0 \\ \text{CANE} \geq 0 \end{cases}$$

volendo anche
sketto

Stessa cosa su tutti i pari

Esempio 1 $\sqrt{20x+9} \geq x+5$

$$\begin{cases} 20x+9 \geq (x+5)^2 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x+5 \leq 0 \\ 20x+9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x+9 \geq x^2+10x+25 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq -\frac{9}{20} \end{cases}$$

No soluzione

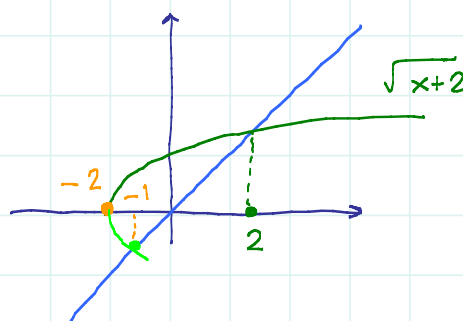
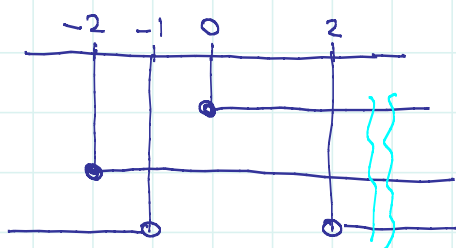
$$\begin{cases} x^2 - 10x + 16 \leq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x \leq 8 \\ x \geq -5 \end{cases} \quad x \in [2, 8]$$

Esempio 2 $\sqrt{x+2} < x$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x+2 < x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x < -1 \text{ oppure } x > 2 \end{cases}$$

$$x \in (2, +\infty)$$



Esempio 3 $\sqrt{x^2+4} > x-1$
 $\uparrow$ sempre positivo $\smile$

$$x-1 \leq 0$$

$\uparrow$ dx negativa

unione

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+4 > (x-1)^2 \end{cases}$$

$$x \leq 1$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \cancel{x^2}+4 > \cancel{x^2}-2x+1 \rightsquigarrow 2x > -3 \end{cases}$$

$$x \leq 1$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

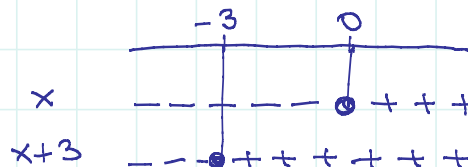
$$\boxed{x \leq 1}$$

$$\boxed{x \geq 1}$$

Quindi la soluzione è tutto $\mathbb{R}$!!

Esercizio ... $|x+3| < |x|+1$

Studiamo il segno dell'argomento dei moduli



$$\begin{cases} x \leq -3 \\ -x-3 < -x+1 \end{cases}$$

↑
gli argomenti sono
negativi, quindi

$$|x+3| = -(x+3)$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ -3 < 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x \leq -3}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ x+3 < -x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ 2x < -2 \text{ cioè } x < -1 \end{cases}$$

$$\boxed{-3 \leq x < -1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 < x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3 < 1 \quad \ddot{\smile} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MAI}}$$

Soluzione : $(-\infty, -1)$

Esempio $||x|-3| < 2 \Rightarrow -2 < |x|-3 < 2$
 $1 < |x| < 5$

Soluzione $[-5, -1] \cup [1, 5]$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

PRECORSO 2025 - LEZIONE 13

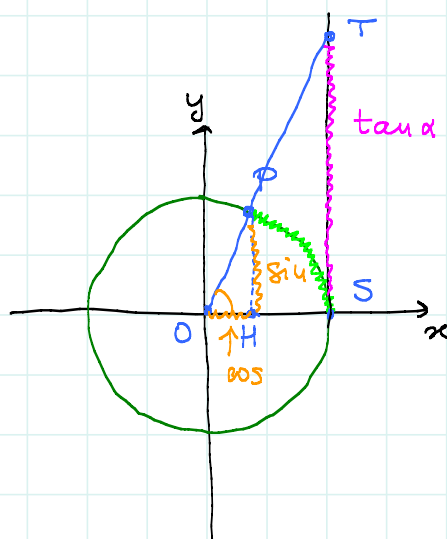
Note Title

18/09/2025

ANGOLI - ARCHI, GRADI - RADIANTI

Circonferenza trigonometrica: centro in $(0,0)$ del piano cartesiano e raggio 1.

Ha equazione $x^2 + y^2 = 1$



Un p.to P della circ. si può descrivere

→ mediante un angolo come in figura

→ mediante la lunghezza dell'arco in figura.

Solite convenzioni per i "giri successivi" e i "giri al contrario".

Dato un angolo / arco α , indiciamo le sue coordinate con $(\cos \alpha, \sin \alpha)$

Quindi

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = OH \\ \sin \alpha = PH \end{array} \right\} \text{pensati con un segno}$$

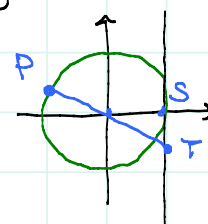
Relazione trigonometrica fondamentale

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$OH^2 + PH^2 = 1 = \text{raggio}^2$$

Si definisce $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ = lunghezza con segno di TS

N.B. La tangente si calcola sempre sulla retta tangente per S, anche P sta nel 2° o 3° quadrante
 $\tan \alpha$ non è definita quando P coincide sull'asse y.



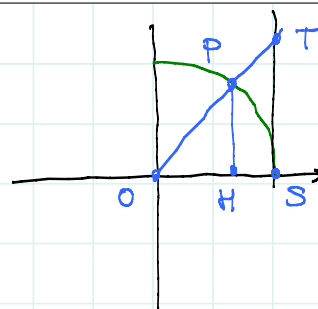
Dim I triangoli OPH e OTS sono simili,
quindi

$$OH : PH = OS : ST$$

$$\cos d : \sin d = 1 : ST$$

$$\leadsto ST = \frac{\sin d}{\cos d}$$

— o — o —



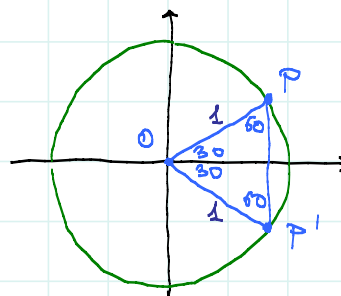
ARCHI - ANGOLI NOTEVOLI Multipli di 30° e di 45°

In questi casi, sin, cos, tan si calcolano facilmente

GRADI	RADIANTI	cos	sin	tan
0°	0	1	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	//

Per $30^\circ \leadsto$ OPP' è equilatero,
quindi $PP' = 1$, ma allora
 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} PP' = \frac{1}{2}$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Il caso a 60° è analogo, solo ruotato

Per $45^\circ \leadsto$ sin e cos sono uguali
quindi $\sin^2 = \cos^2 = \frac{1}{2}$
e quindi

$$\sin = \cos = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



ARCHI ASSOCIATI $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, e così via

Slogan: pensare al disegno!

Dove sta $\pi - \alpha$? Mi ritrovo in P'

... quindi

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

Dove sta $\pi + \alpha$? Mi ritrovo in P'' ... quindi

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

Dove sta $\frac{\pi}{2} - \alpha$? Mi ritrovo in Q ... quindi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad (\sin \text{ e } \cos \text{ si scambiano})$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$120^\circ \quad \frac{2\pi}{3} \quad \cos = -\frac{1}{2} \quad \sin = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan = -\sqrt{3}$$

$$150^\circ \quad \frac{5\pi}{6} \quad \cos = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin = \frac{1}{2} \quad \tan = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

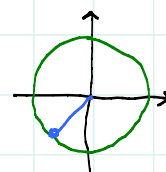
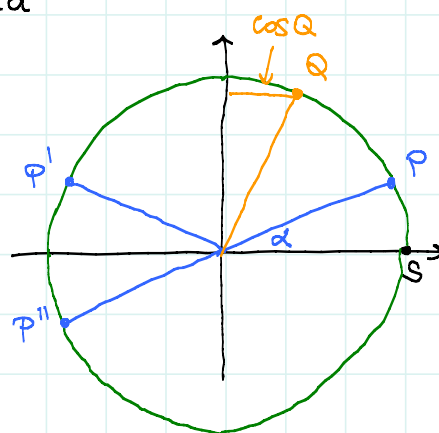
$\uparrow$
 $\pi - \frac{\pi}{6}$

$$2025^\circ \quad 2025^\circ = 1800^\circ + 225^\circ = 1800^\circ + 180^\circ + 45^\circ$$

$\uparrow$
 $10\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$

$$\sin = \cos = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan = 1$$

$$-960^\circ = -900^\circ - 60^\circ \quad \text{è come fosse } 120^\circ$$



$-5\pi/6$	$\leadsto$ è come fosse -150° , quindi $180^\circ + 30^\circ$
$-3\pi/4$	$\leadsto 225^\circ$
$-9\pi/2$	$\leadsto 270^\circ$ $-\frac{9}{2}\pi = \frac{-8-1}{2}\pi$
$17\pi/6$	$\leadsto 3\pi - \frac{\pi}{6} \leadsto 150^\circ$ $= -4\pi - \frac{\pi}{2}$
$-8\pi/3$	$-\frac{8}{3}\pi = \frac{-6-2}{3}\pi = -2\pi - \frac{2}{3}\pi$
121π	$\sim -120^\circ = 240^\circ$

Formula conversione gradi $\leadsto$ radianti

$$\text{gradi} : \text{radianti} = 360^\circ : 2\pi$$

Ad esempio $\frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{10} \sim 36^\circ$

— 0 — 0 —

PRECORSO 2025 - LEZIONE 14

Note Title

18/09/2025

Esercizio Se $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ e siamo nel 3° quadrante, quanto vale $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{25}} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

↑
siamo nel
3° quadrante

Se siamo nel 3° quadrante e $\tan \alpha = 7$, quanto valgono $\sin$ e $\cos$?

1° modo Impongo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 7 & \leadsto \sin \alpha = 7 \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$49 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \leadsto \cos^2 \alpha = \frac{1}{50} \leadsto \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{50}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

↑
terzo quadr.

$$\sin \alpha = 7 \cos \alpha = -\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

2° modo $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Se conosco $\tan$, trovo $\cos$

Analogamente

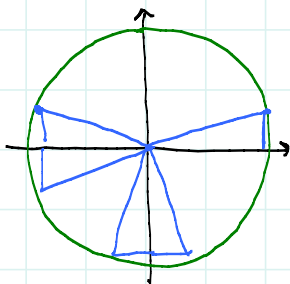
$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Esercizio

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 -\sin(200^\circ) & -\cos(-110^\circ) & \sin(20^\circ) & \cos(-70^\circ) & \sin(520^\circ) & -\cos(160^\circ) \\
 \hline
 \cos(179^\circ) & -\cos(181^\circ) & \sin(89^\circ) & \cos(359^\circ) & \cos(1^\circ) & \sin(91^\circ) \\
 \hline
 \end{array}$$

3.180
540-20
↑

In ogni riga ci sono 5 numeri uguali e 1 diverso



Riportare al 1° quadrante

$$\sin(263^\circ) = -\sin 83^\circ$$

$$= -\cos 7^\circ$$

$$\cos(129^\circ) = -\cos(51^\circ)$$

$$= -\sin(39^\circ)$$

— o — o —

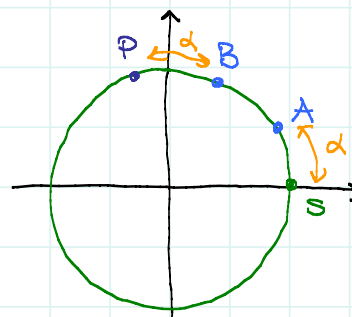
FORMULE DI ADDIZIONE - SOTTRAZIONE

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$



Idea della dim.

Pseudo $S = (1, 0)$, $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$B = (\cos \beta, \sin \beta)$, $P = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$

Imponiamo $PB^2 = AS^2$ e con qualche calcolo troviamo $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$.

NB: oltre alla relazione di sopra ho anche $\cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = 1$
... vedere che succede con i conti.

Oss.1 Con $\alpha = \pi$ o $\frac{\pi}{2}$ vengono gli archi associati

Oss.2 Così possiamo fare $\sin(15^\circ)$ e $\cos(15^\circ)$

$$\begin{aligned} \cos(15^\circ) &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \dots \end{aligned}$$

Formule di duplicazione (Mettere $\alpha = \beta$ in quelle di addizione)

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

Esercizio $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x) \cos x + \cos(2x) \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + (2\cos^2 x - 1) \sin x \\ &= 4 \sin x \cos^2 x - \sin x \end{aligned}$$

Se da voglio di soli seni $= 4 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin x$
 $= 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

Formule product to sum $\cos \alpha \cos \beta$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Se sommo le due righe e poi divido per 2

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha-\beta)$$

Analogamente

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha+\beta)$$

Formule sum to product

$$\cos x + \cos y = ??$$

Riscrivo quella sopra come

Impulso

$$\begin{cases} \alpha+\beta = x \\ \alpha-\beta = y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$\cos \underbrace{(\alpha+\beta)}_x + \cos \underbrace{(\alpha-\beta)}_y = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

Come posso fare $\sin x + \cos y$?

Basta ricordare che $\sin x + \cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos y$
e usare la somma di 2 cos.

$\cos(80^\circ) = 1 - 2\sin^2(a)$	40°	$\cos(50^\circ) = 1 - 2\cos^2(a)$	65°
$2\cos(40^\circ) \cdot \cos(50^\circ) = \cos(a)$	10°	$2\sin(40^\circ) \cdot \sin(50^\circ) = \sin(a)$	50°

↑
In alternativa: product $\rightarrow$ sum

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad \leadsto \quad x = 40^\circ$$

$$x = 25^\circ \quad \leadsto \quad \cos(50^\circ) = 1 - 2\underbrace{\sin^2(25^\circ)}_{\cos(65^\circ)} = 1 - 2\cos^2(65^\circ)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$x = 40^\circ \quad \leadsto \quad \sin(80^\circ) = 2\sin(40^\circ) \cdot \cos(40^\circ) = 2\sin(40^\circ)\sin(50^\circ)$$

$$2\cos(40^\circ) \cdot \cos(50^\circ) = 2\cos(40^\circ)\sin(40^\circ) = \sin(80^\circ) = \cos(10^\circ)$$

— o — o —

PRECORSO 2025 —

LEZIONE 15

Note Title

18/09/2025

Esempio $\cos^6 x + \sin^6 x$ $1 = \cos^2 x + \sin^2 x \rightsquigarrow$ elevo al cubo

$$1 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 = \cos^6 x + 3\cos^4 x \sin^2 x + 3\cos^2 x \sin^4 x + \sin^6 x$$

$$\rightsquigarrow \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4\cos^2 x \sin^2 x}{\sin^2(2x)}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2(2x)$$

$\downarrow$
volendo lo puoi ridurre a $\cos(4x)$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha \rightsquigarrow \cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$$

$$\rightsquigarrow \sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$$

Nota x , come calcolo $\sin$ e $\cos$ di $\frac{x}{2}$

Si parte da $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

Se metto $x = \frac{\alpha}{2}$, riesco a trovare $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ e $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ in funzione di $\cos \alpha$.

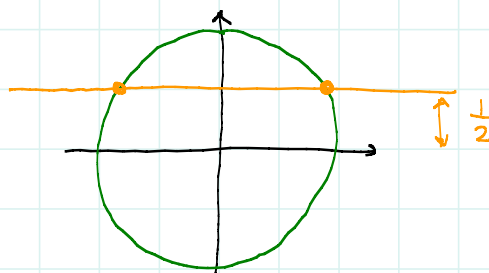
Occhio che nel ricavare $\cos(\frac{\alpha}{2})$ e $\sin(\frac{\alpha}{2})$ bisogna scegliere il segno a seconda del quadrante.

— o — o —

Equazioni trigonometriche BASIC

Es. 1 $\sin x = \frac{1}{2}$ Trovare le soluzioni in $[0, 2\pi]$
e le soluzioni in $[0, 3\pi]$

SLOGAN: guardare il cerchio



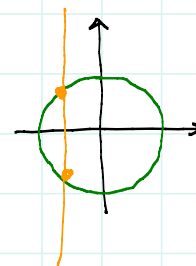
In $[0, 2\pi]$ le soluz. sono
 $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$

In $[0, 3\pi]$ sono $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $2\pi + \frac{\pi}{6}$ $2\pi + \frac{5\pi}{6}$

In $[-2\pi, 0]$ le soluzioni sono $-\frac{11}{6}\pi$, $-\frac{7}{6}\pi$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $-2\pi + \frac{\pi}{6}$, $-2\pi + \frac{5\pi}{6}$

Es. 2 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $[0, 2\pi]$

Sono $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$

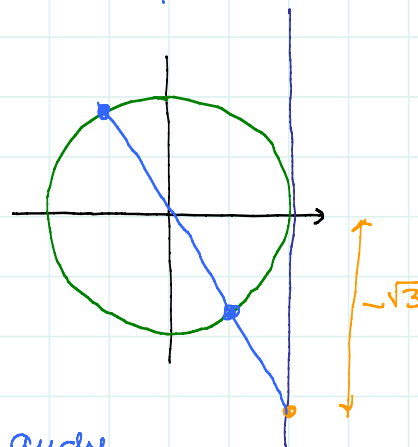


Se le volessi in $[0, 3\pi]$: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$
 $\uparrow$
 $2\pi + \frac{3\pi}{4}$

Es. 3 $\tan x = -\sqrt{3}$ in $[0, 3\pi]$

le soluzioni sono

$\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$



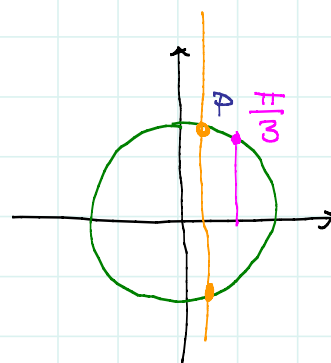
In generale: $\frac{2\pi}{3} + k\pi$ con k intero, anche
negativo

Es 4 $\cos x = \frac{1}{7}$ soluzioni in $[0, 2\pi]$?
 soluzioni in $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$?

Ci sono 2 sol. in $[0, 2\pi]$

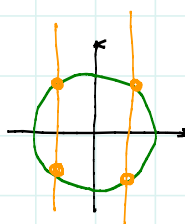
Domanda: il pto P è prima o dopo $\frac{\pi}{3}$?

Quindi c'è una sol. in $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$



Es 5 $2 \cos^2 x = 1$ in $[0, 2\pi]$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \cos x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$\leadsto$ 4 soluzioni: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ $\leadsto$ in generale $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Es 6 $\cos x = \cos(2x)$

1° modo Formula per $\cos(2x) \leadsto \cos x = 2\cos^2 x - 1$

$$\leadsto 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \leadsto (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \nearrow \cos x = 1 & \leadsto x = 0 (+2k\pi) \\ \searrow \cos x = -\frac{1}{2} & \leadsto x = \frac{2\pi}{3} \text{ e } x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

(volendo sempre $+2k\pi$)

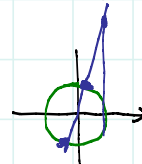
2° modo $\cos(\text{CANE}) = \cos(\text{GATTO})$

$$\leadsto \cos(\text{CANE}) - \cos(\text{GATTO}) = 0$$

$\leadsto$ sum to product e diventa + semplice

Es 7 $\sin x = 27 \cos x$ in $[0, 2\pi]$ ha 2 soluzioni

Divido $\frac{\sin x}{\cos x} = 27 \leadsto \tan x = 27$



(posso dividere perché non ci sono soluz con $\cos x = 0$)

Disuguaglianze trigonometriche

ES 1 $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $[0, 2\pi]$

Soluzione: $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$

In generale, senza la cond. $x \in [0, 2\pi]$, si può scrivere come

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}} \quad \text{NO!!!}$$

oppure $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right]$

ES 2 $2 \sin^2 x \leq \sin x$

$$2 \sin^2 x - \sin x \leq 0 \quad \sin x (2 \sin x - 1) \leq 0$$

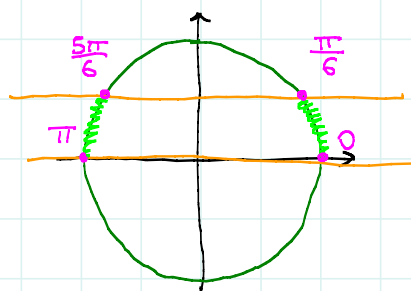
ora studio separatamente i due fattori

2° modo Pongo $y = \sin x \rightsquigarrow 2y^2 \leq y \rightsquigarrow 2y^2 - y \leq 0$
 $\rightsquigarrow y \in [0, \frac{1}{2}] \rightsquigarrow 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$

Torno in $\sin x \rightsquigarrow 0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ e ora guardo il cerchio

Soluzioni in $[0, 2\pi]$:

$$\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right] \cup \{2\pi\}$$



ES 3 $\sin x + \cos x < 1$

Divido per $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

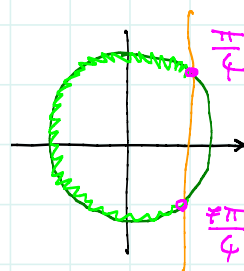
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzione:

$$\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}$$

$$\leadsto \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \quad (\text{anche questa si ripete con periodo } 2\pi).$$

— 0 — 0 —



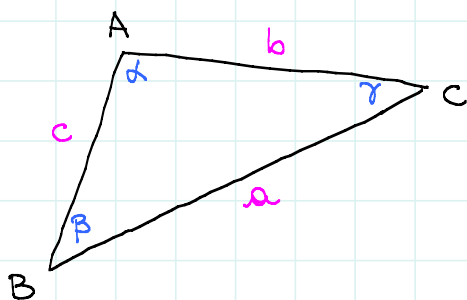
PRECORSO 2025 - LEZIONE 16

Note Title

18/09/2025

TRIGONOMETRIA E TRIANGOLI RETTANGOLI

Notazioni standard per un triangolo

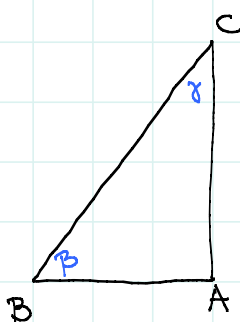


A, B, C ~ vertici

 α, β, γ ~ angoli corrispondenti

a, b, c ~ lunghezze dei lati opposti

Caso speciale: triangolo rettangolo in A



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{Pitagora}$$

[Se $BC = 1$, allora $AB = \cos \beta$, $AC = \sin \beta$]

Più in generale

$$AB = BC \cdot \cos \beta \quad AC = BC \cdot \sin \beta$$

A parole: cateto = ipotenusa $\cdot$ cos (angolo adiacente)
 = ipotenusa $\cdot$ sin (angolo opposto)

$$AB = BC \cdot \sin \gamma \quad AC = BC \cdot \cos \gamma$$

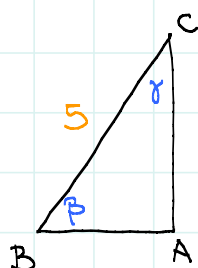
Oss. $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$ quindi γ e β hanno sin e cos scambiati

$$\frac{AC}{AB} = \tan \beta$$

$$\frac{AB}{AC} = \tan \gamma$$

Fatto generale: noti due dati, oppure un dato e una funzione trigonometrica di un angolo, posso trovare tutto il resto.

AB	AC	BC	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$	$\tan \gamma$
3	4	5	$4/5$	$3/5$	$4/3$	$3/5$	$4/5$	$3/4$
3	$\sqrt{7}$	4	$\sqrt{7}/4$	$3/4$	$\sqrt{7}/3$	$3/4$	$\sqrt{7}/4$	$3/\sqrt{7}$
	3	4						



$$BC = 5 \quad \sin \beta = \frac{1}{3}$$

$$\leadsto \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$AB = BC \cdot \cos \beta = \frac{10\sqrt{2}}{3} \quad AC = BC \cdot \sin \beta = \frac{5}{3}$$

$$\tan \gamma = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{AB}{AC} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{5} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = 5 \quad \tan \beta = \frac{1}{3}$$

1° modo $\frac{AC}{AB} = \tan \beta = \frac{1}{3} \leadsto AB = 3AC$

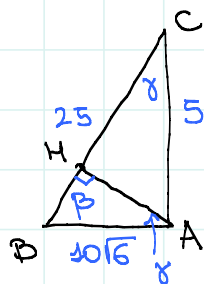
$$AB^2 + AC^2 = 25 \leadsto 10AC^2 = 25 \leadsto AC^2 = \frac{25}{10} \leadsto AC = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

2° modo Ricordiamo che $1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$

$$1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\leadsto \cos^2 \beta = \frac{9}{10} \leadsto \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \leadsto \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$AC = 5 \cdot \sin \beta = \frac{5}{\sqrt{10}} \quad \text{NB} \quad \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$



$$AC = 5$$

$$\sin \beta = \frac{1}{5}$$

$$AC = BC \cdot \sin \beta \leadsto 5 = 25 \cdot \frac{1}{5} \leadsto BC = 25$$

Pitagora $\leadsto$ AB

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$AB = BC \cdot \cos \beta = 25 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 10\sqrt{6} \quad \therefore$$

Se volessi l'altezza AH?

1° modo: calcolo l'area e poi divido per BC $\leadsto AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$

2° modo: guardando il triangolo HAB, rettangolo in H, scopriamo che $AH = AB \cdot \sin \beta$

$$= 10\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = 2\sqrt{6}$$

— o — o —

TRIANGOLO GENERALE

Tre scenari: $\rightarrow$ conosco i 3 lati

$\rightarrow$ conosco 2 lati e angolo compreso

$\rightarrow$ conosco 1 lato e gli angoli

Oss. Se conosco il sin di un angolo, ho incertezza tra 2 valori per l'angolo (uno acuto, uno ottuso)

Se conosco il cos, allora conosco l'angolo.

Due strumenti fondamentali

TEOREMA DEL SENO $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
 ↑
 raggio circ.
 circoscritta

TEOREMA DEL COSENO $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (e cicliche)

Scenario 1 Conosco i 3 lati

→ con il teorema del coseno trovo i 3 cos, e quindi i 3 angoli (se un cos viene negativo, c'è un angolo ottuso)

Scenario 2 Conosco 2 lati e l'angolo compreso

→ con il teorema del coseno trovo il terzo lato, e sono nello scenario precedente

Scenario 3 Conosco un lato e i due angoli adiacenti

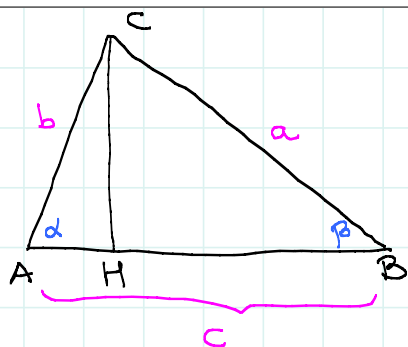
In realtà conosco anche il terzo angolo, poi faccio il teorema dei seni.

Mi serve il sin del terzo angolo... supponiamo di sapere α e β , il terzo angolo è $\pi - (\alpha + \beta)$, quindi

$$\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta) = \text{si calcola facilmente}$$

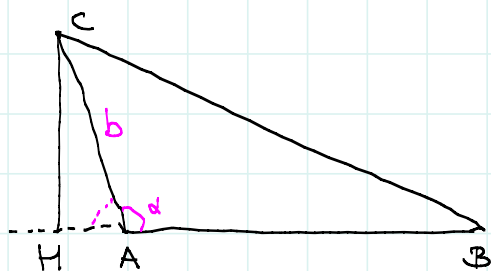
FORMULA TRIGONOMETRICA PER L'AREA

$$\text{Area} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad (\text{e cicliche})$$



$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} AB \cdot CH \\ &= \frac{1}{2} c \cdot b \sin \alpha \end{aligned}$$

Cosa succede se cambio α con $\pi - \alpha$?



L'altezza non cambia perché
 $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$

— o — o —

PRECORSO 2025 - LEZIONE 17

Note Title

19/09/2025

GEOM. ANALITICA: LA RETTA

Eq. retta: $\rightarrow$ eq. esplicita: $y = mx + n$
 $\rightarrow$ eq. implicita: $ax + by + c = 0$

Vantaggi esplicita: rette diverse hanno m o n diversi (o entrambi)
 m ed n hanno un significato geometrico
 per ogni m ed n ottengo una retta

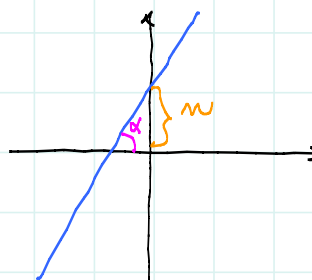
Svantaggi esplicita: non descrive tutte le rette, perché mancano
 le verticali che hanno eq. del tipo $x = x_0$

Significato geom.

$$y = mx + n$$

$\uparrow$ intersezione con asse y
 $\uparrow$ coeff. angolare = "pendenza della retta"
 $m = \tan \alpha$

$m = 2$ vuol dire che quando vado
 di un quadretto a dx la retta
 sale di 2 quadretti verso l'alto



Retta generica passante per un p.to $P = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

quando metto $x = x_0$
 diventa y_0

Es1 $A = (1, 2)$ $B = (3, 3)$

retta AB **1° modo** $y = mx + n$ (vedo che non è verticale)

Impongo il passaggio per i due p.ti

$$\begin{cases} 2 = m + n \\ 3 = 3m + n \end{cases} \quad 2^a - 1^a: 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow n = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2° modo Scrivo la retta generica per A: $y = 2 + m(x - 1)$

Ora trovo m imponendo il passaggio per B:

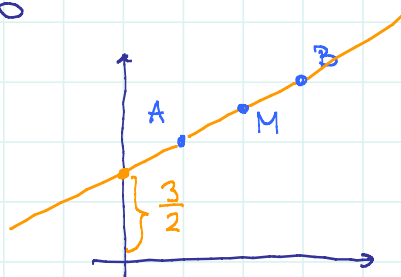
$$3 = 2 + m(3 - 1) \Rightarrow 1 = 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x - 1) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \ddot{\smile}$$

In forma implicita: $x - 2y + 3 = 0$

3° modo Con i quadretti

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



RETTE PARALLELE = stesso m (stesso angolo con asse x)

RETTE PERPENDICOLARI = $\hat{m} = -\frac{1}{m}$ $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \alpha$

$$\tan \hat{\alpha} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

Calcolare equazione dell'asse di AB

$\Rightarrow$ passa per il p.to medio

$\Rightarrow$ è perpendicolare a quell'altra

$$A = (1, 2) \quad B = (3, 3) \Rightarrow M = (2, \frac{5}{2})$$

$$y = \frac{5}{2} + m(x - 2) = \frac{5}{2} - 2(x - 2) = -2x + \frac{5}{2} + 4 = -2x + \frac{13}{2}$$

2° modo Asse AB = luogo dei p.ti equidistanti da A e B

$$\underbrace{(x-1)^2 + (y-2)^2}_{\text{dist}(P,A)^2} = \underbrace{(x-3)^2 + (y-3)^2}_{\text{dist}(P,B)^2} \quad P=(x,y)$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 6y + 9$$

$$4x + 2y - 13 = 0 \quad \leadsto \quad y = -2x + \frac{13}{2} \quad \text{!}$$

Distanza di un p.to da una retta

Sia P il p.to. Sia r la retta. Calcolo la retta s che passa per P ed è $\perp$ ad r . Calcolo H come intersezione fra r ed s .

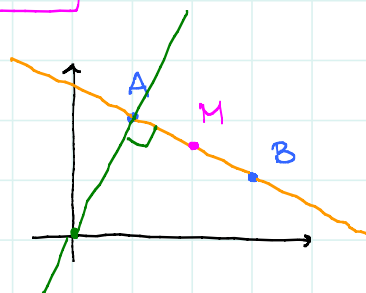
A quel p.to : $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, H)$

Fatti tutti i conti... si ottiene che se $P = (x_0, y_0)$ e r ha eq. implicita $ax + by + c = 0$, allora

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Es 2 $A = (1, 2)$ $B = (3, 1)$

retta AB $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$



asse AB $y = \frac{3}{2} + 2(x-2) \leadsto y = 2x + \frac{3}{2} - 4 = 2x - \frac{5}{2}$

distanza di origine da retta AB retta AB: $x + 2y - 5 = 0$

$$\text{dist} = \frac{|1-5|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$$

Punto più vicino all'origine?
È proprio A

ES3

$r: y = x - 5$

$s: x - y + 3 = 0$

Punto di intersezione: $\begin{cases} y = x - 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$ sono parallele !!

Retta per l'origine e $\perp$ ad r : $y = -x$

$$\text{dist}((2,3), s) = \frac{|2 - 3 + 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad [\text{Verificare con disegno}]$$

ES4

retta r : $y - 2 = 5x$ $P = (2, -3)$

Retta per P e $\parallel$ ad r : $y = -3 + m(x - 2) = 5x - 13$
 $\uparrow$
 $m = 5$

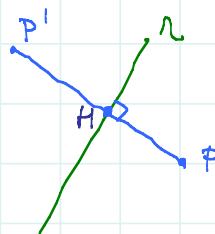
Retta per P e $\perp$ ad r : $y = -3 - \frac{1}{5}(x - 2)$
 $5y = -15 - x + 2 \rightsquigarrow x + 5y + 13 = 0$

P.to P' simmetrico di P rispetto ad r

→ calcolo retta per P e $\perp$ ad r

→ interseco e trovo H

→ cerco P' in modo che il p.to
medio di PP' sia H .



Se ho un triangolo

→ altezza: retta per un vertice $\perp$ al lato opposto

→ mediana: " " che passa per p.to medio lato opposto

→ bisettrice? È il luogo dei p.ti che hanno la stessa distanza
dalle due rette che descrivono due lati

Vengono (tolta i valori assoluti) due rette e occorre prendere
quella giusta.

— o — o —

PRECORSO 2025 - LEZIONE 18

Note Title

19/09/2025

GEOM. ANALITICA: CIRCONFERENZA

Dato un centro $C = (x_0, y_0)$ ed un raggio $R > 0$, la circ. di centro C e raggio R è il luogo dei p.ti P tali che $\text{dist}(P, C) = R$

Posto $P = (x, y)$, l'eq. diventa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Esponendo i quadrati diventa

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

Quindi se la vediamo scritta come

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

→ Se x^2 e y^2 hanno lo stesso coeff. posso sempre ridurmi a questa forma

allora

$$x_0 = -\frac{a}{2}$$

$$y_0 = -\frac{b}{2}$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

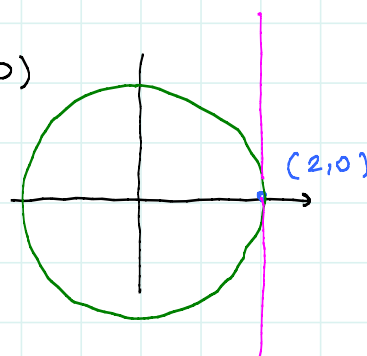
Questo deve essere > 0

Es 1 Centro in $(0, 0)$ e passante per $P = (2, 0)$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \uparrow R^2$$

Retta tang. alla circ. in P : $x = 2$

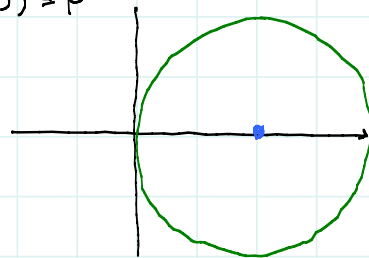
↑ retta per P e $\perp$ al raggio che passa per P



ES 2 Centro in $(2,0)$ e passante per $(0,0) = P$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \rightsquigarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$$

↑ Quando passa per l'origine non c'è il termine noto

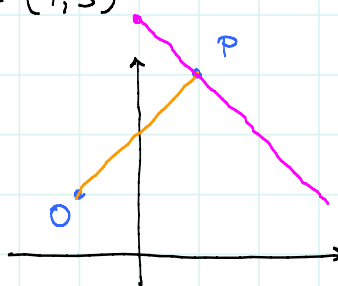


Retta tang. in P : $x=0$

ES 3 Centro $O = (-1,1)$ e passa per $P = (1,3)$

Equazione: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$
 $\uparrow (2\sqrt{2})^2$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$$



Retta tangente in P : $y = -x + 4$ (dal disegno $m = -1$ e $m = 4$)

Altra interpretazione: $y = 3 + m(x-1)$ ← retta generica per P

Impongo che l'intersezione con la circ. sia unica

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0 \\ y = mx + (3-m) \end{cases} \rightsquigarrow x^2 + [mx + (3-m)]^2 + 2x - 2[mx + (3-m)] - 6 = 0$$

↪ uso formula per l'eq. di 2° grado e impongo $\Delta = 0$

Verifichiamo che succede nel nostro caso

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (-x+4)^2 + 2x - 2(-x+4) - 6 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 + 2x + 2x - 8 - 6 = 0 \rightsquigarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\rightsquigarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\rightsquigarrow (x-1)^2 = 0 \rightsquigarrow x=1 \quad \ddot{\smile}$$

ES 4 $A = (5, 1)$ $B = (1, 4)$

→ Circ. di diametro AB

Centro $C = (3, \frac{5}{2})$

$$R^2 = \text{dist}^2(C, A) = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

(Potrebbe fare $R = \frac{\text{dist}(A, B)}{2}$) $(x-3)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$

$$\leadsto x^2 - 6x + 9 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} \leadsto x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0$$

Retta tangente in A: $y = 1 + m(x-5) = 1 + \frac{4}{3}(x-5)$

→ forma implicita

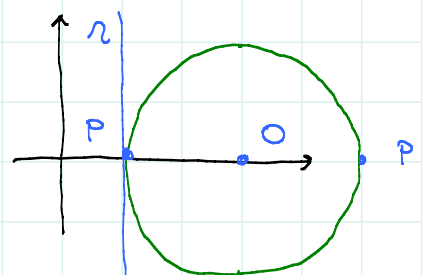
↑ retta AB ha
coeff. ang. = $-\frac{3}{4}$

ES 5 $O = (3, 0)$ $r: x=1$

→ circ. per O e tang. ad r

$$(x-3)^2 + y^2 = 4 \quad \text{no conti}$$

→ retta tang. in P' : $x=5$



ES 6 $O = (2, 3)$ $r: 3x+y=5$

→ circ. per O e tang. ad r

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = R^2 \quad \text{dove } R = \text{dist}(O, r) = \frac{|6+3-5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

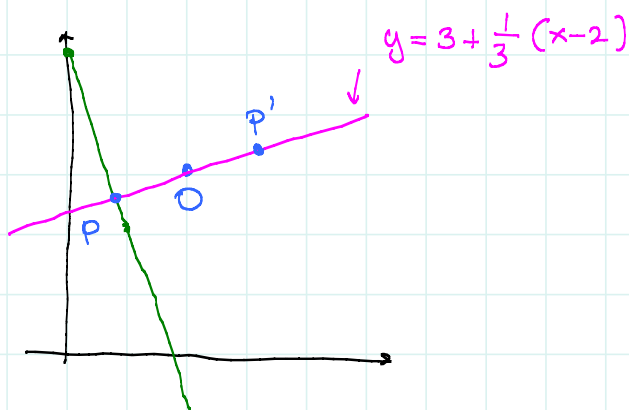
$$= \frac{8}{5}$$

→ per fare la tangente in P'

→ trovo P intersecando r con la $\perp$ passante per O

→ trovo P' in modo che il p.to medio di PP' sia O

→ retta per P' e $\parallel$ ad r



Es: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + a = 0$
 $\uparrow$ parametro

(1) Quando è davvero una circonferenza

1° modo uso formula per il raggio

2° modo Provo a completare i $\square$:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + a = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + a - 10 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10 - a$$

$= R^2$ e deve essere > 0

Quindi è una circ. se e solo se $a < 10$

Si vede anche che il centro è $(-1, 3)$

(2) Quando passa per l'origine? $\Leftrightarrow a = 0$

(3) Raggio = 4? $\Leftrightarrow 10 - a = 16 \Leftrightarrow a = -6$

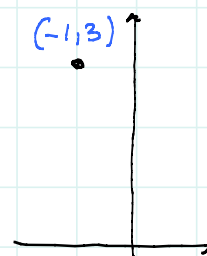
(4) tangente all'asse x? $\Leftrightarrow R = 3 \Leftrightarrow 10 - a = 9 \Leftrightarrow a = 1$

(5) tangente a $x + 2y + 3 = 0$?

1° modo: metto a sistema e impiego $\Delta = 0$

2° modo: $R = \text{dist}(\text{centro}, \text{retta})$

— 0 — 0 —



PRECORSO 2025 - LEZIONE 19

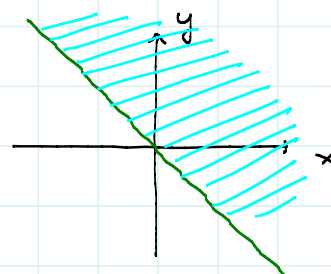
Note Title

19/09/2025

SOTTOINSIEMI DEL PIANO DESCRITTI DA DISEQUAZIONI

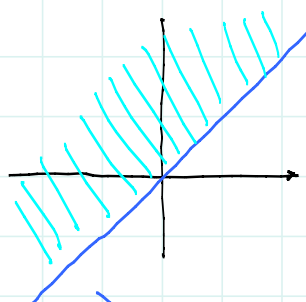
ES1 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$

$\leadsto y > -x \leadsto$ sopra la retta $y = -x$



ES2 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \leq 0\}$

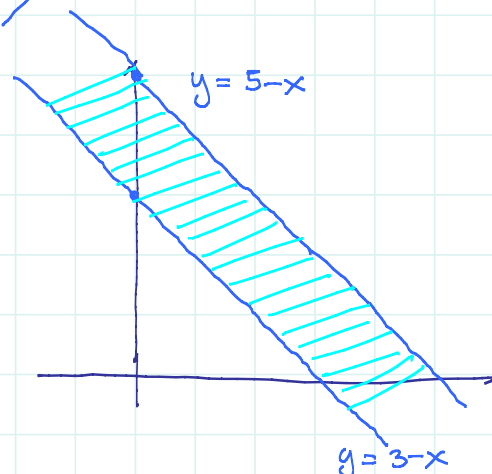
$\leadsto y \geq x$



ES3 $3 \leq x+y \leq 5$

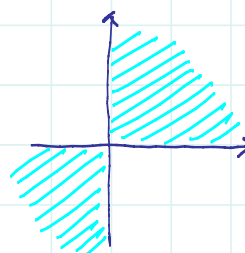
Due condizioni che devono essere vere contemporaneamente

$$\begin{cases} 3 \leq x+y \\ x+y \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -x+3 \\ y \leq -x+5 \end{cases}$$

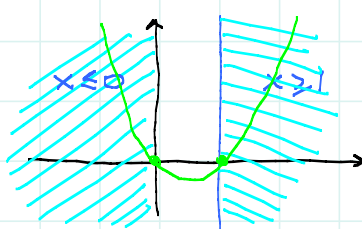


ES4 $xy \geq 0$

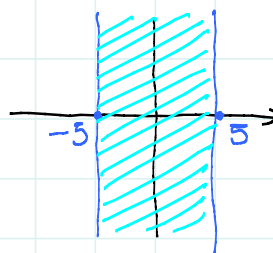
$\nearrow x \geq 0$ e $y \geq 0 \leadsto 1^o$ quadrante
 $\searrow x \leq 0$ e $y \leq 0 \leadsto 3^o$ quadrante



ES5 $x^2 - x \geq 0 \dots$ si intende $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x \geq 0\}$
 $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$ valori estremi



Es6 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 5\}$
 $-5 \leq x \leq 5$

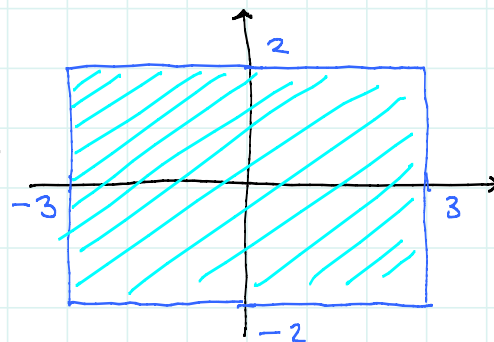


Es7 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 3, |y| \leq 2\}$

Es7 bis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 \leq 9, y^2 \leq 2\}$

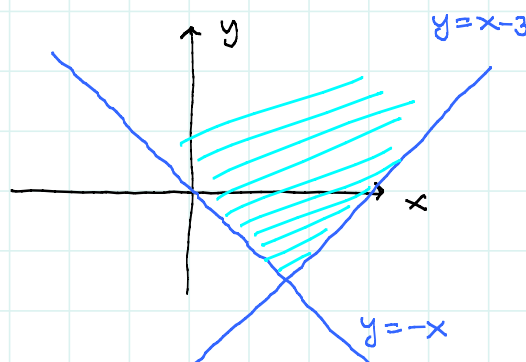
$\leadsto -3 \leq x \leq 3, -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$

$\leadsto$ rettangolo analogo a prima



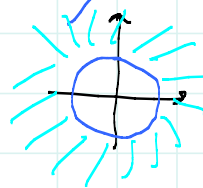
Es8 $x+y > 0$ e $x-y < 3$

$$\begin{cases} x+y > 0 \\ x-y < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y > -x \\ y > x-3 \end{cases}$$



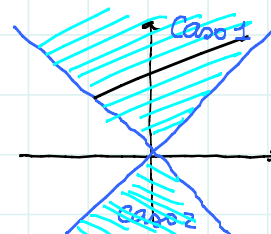
Es9 $x^2 + y^2 \geq 8$

$\leadsto$ Punti la cui distanza dall'origine
 è $\geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \leadsto$ esterno della circ.
 (bordo compreso)



Es10 $x^2 + y^2 \leq 8 \leadsto$ interno della circ.
 (bordo compreso)

Es11 $x^2 - y^2 \leq 0$



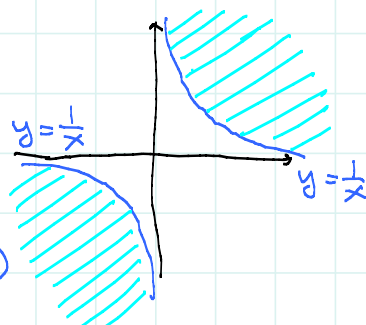
Se fosse $x^2 - y^2 = 0 \leadsto (x+y)(x-y) = 0 \leadsto x+y=0$ oppure $x-y=0$
 cioè le 2 bisettrici

Ora abbiamo $(x+y)(x-y) \leq 0$, quindi ci sono due casi

- $x+y \geq 0$ e $x-y \leq 0 \leadsto y \geq -x$ e $y \geq x \leadsto$ Caso 1
- $x+y \leq 0$ e $x-y \geq 0 \leadsto y \leq -x$ e $y \leq x \leadsto$ Caso 2

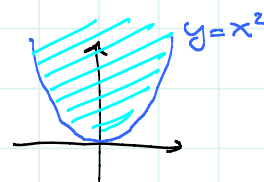
Es 12 $xy \geq 1$

$\leadsto y \geq \frac{1}{x}$ nel 1° quadr. (no diviso per $x > 0$)

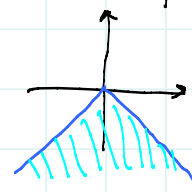


$\leadsto y \leq \frac{1}{x}$ nel 3° quadr. (no diviso per $x < 0$)

Es 13 $y - x^2 \geq 0 \leadsto y \geq x^2 \leadsto$ sopra la parabola



Es 14 $y + |x| \leq 0 \leadsto y \leq -|x| \leadsto$ sotto $-|x|$



Es 15 $\underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{1^\circ \text{ quadr.}}, \underbrace{xy \leq 1}_{y \leq \frac{1}{x}}$



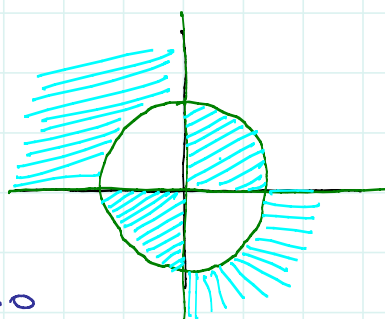
Es 16 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x^2$
 $\uparrow$
 $y \geq 0$ e sotto la parabola



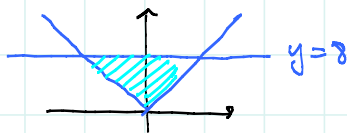
Es 17 $xy(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$

Se fosse $= 0$ sarebbero gli assi e la circonferenza

- nel 1° e 3° quadrante si ha $xy > 0$ quindi deve essere $x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \leadsto$ dentro la circ.
- nel 2° e 4° quadrante si ha $xy < 0$ quindi $x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \leadsto$ fuori dalla circ.



Es 18 $|x| \leq y \leq 8$



Es 19 $|x| + 2|y| \leq 4$

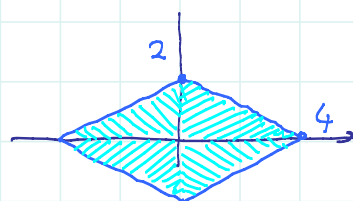
1^a oss Se cambio segno a x e y la cond. non cambia

→ se capisco il 1° quadrante, poi simmetrizzo

2^a oss Nel 1° quadrante diventa $x + 2y \leq 4$, cioè $y \leq 2 - \frac{x}{2}$

Voleudo posso fare il conto in ogni quadrante

Nel 2° sarebbe $-x + 2y \leq 4$
 $\rightarrow y \leq 2 + \frac{x}{2}$

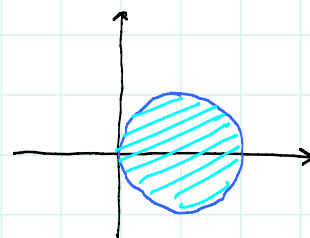


Es. 20 $x^2 - 2x + y^2 \leq 0$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

↑
distanza da (1,0)
 ≤ 1

— 0 — 0 —



PRECORSO 2025 – LEZIONE 20

Note Title

19/09/2025

A₁	$x^2 - y^2 = 0$
A₂	$x^2 + x = 0$
A₃	$y^2 + 3 = x + y$
A₄	$y^2 = 3 - x^2$
A₅	$x^2 + y^2 = 0$
A₆	$y^2 = x^4$
A ₇	$x^2 + xy + y^2 = -1$
A₈	$x^2 + xy = 0$
A₉	$y^2 = 1$
A₁₀	$x^3 + y^3 = 0$

B ₁	L'insieme vuoto
B₂	Un punto
B₃	Una retta
B₄	Due rette parallele all'asse x
B₅	Due rette parallele all'asse y
B₆	Due rette perpendicolari
B₇	Due rette incidenti a 45°
B₈	Una circonferenza
B₉	Una parabola
B₁₀	Due parabole

A ₁	B ₆	$y = x$ $y = -x$
A ₂	B ₅	$x = 0$ $x = -1$
A ₃	B ₉	$x = y^2 - y + 3$
A ₄	B ₈	$x^2 + y^2 = 3$
A ₅	B ₂	$(x, y) = (0, 0)$
A ₆	B ₁₀	$y = x^2$ $y = -x^2$
A ₇	B ₁	
A ₈	B ₇	
A ₉	B ₄	$y = 1$ $y = -1$
A ₁₀	B ₃	$y = -x$

$$A_8: x^2 + xy = 0 \leadsto x(x+y) = 0 \leadsto x=0 \text{ opp } y=-x$$

$$A_{10}: x^3 = -y^3 \leadsto (x)^3 = (-y)^3 \leadsto x = -y$$

$$A_6: y^2 = x^4 \leadsto y = x^2 \text{ opp } y = -x^2$$

$$A_7: x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1$$

$\leadsto$ impossibile

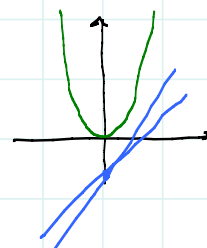
(1) La par. $y = 2x^2$ è tang. alla retta $y = ax - 1$

Ci aspettiamo 2 valori. Metto a sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = ax - 1 \end{cases} \leadsto \begin{cases} 2x^2 = ax - 1 \\ 2x^2 - ax + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \quad a^2 - 8 = 0 \leadsto a = \pm 2\sqrt{2}$$

le due rette sono simm. rispetto asse y



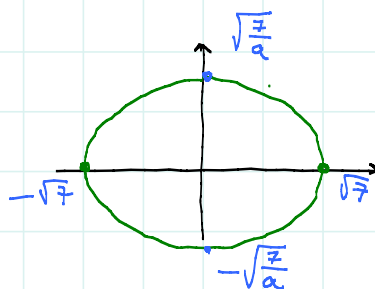
(2) $x^2 + ay^2 = 7$ è ellisse con semiasse maggiore = 3.

Ellisse: $ax^2 + by^2 = c$ con $a, b, c > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Per $y=0$ viene $x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$

Per $x=0$ viene $y = \pm \sqrt{\frac{c}{b}}$



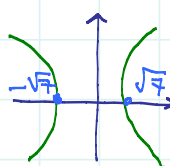
Deve essere $\sqrt{\frac{7}{a}} = 3 \leadsto \frac{7}{a} = 9 \leadsto a = \frac{7}{9}$

(3) $x^2 + ay^2 = 7$ è circ. $\Leftrightarrow a=1$

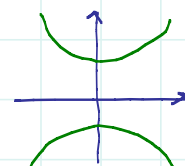
altrimenti

$\rightarrow$ per $a > 0$ è ellisse

$\rightarrow$ per $a < 0$ è iperbole



↑
Di questo tipo
perché interseca
assi x



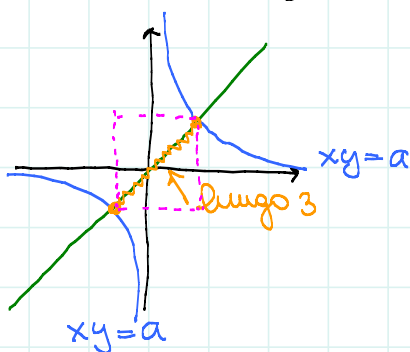
↑
questa NO

(4) $x^2 + ay^2 = 7$ è ellisse tangente alla retta $x + 2y + 5 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + ay^2 = 7 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= -2y - 5 \leadsto (-2y - 5)^2 + ay^2 = 7 \\ &\leadsto 4y^2 + 20y + 25 + ay^2 - 7 = 0 \\ &\leadsto (4+a)y^2 + 20y + 18 = 0 \\ &\leadsto \Delta = 100 - 18(4+a) = 0 \\ &\leadsto \text{trovo } a \text{ unico e positivo} \end{aligned}$$

(5) L'iperbole $xy = a$ stacca su $x=y$ un segmento lungo 3



Trovo le intersezioni $x^2 = a$

$\leadsto$ deve essere $a > 0 \leadsto a$ quel p.to

le intersezioni sono $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$ e $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$

Il segmento è lungo

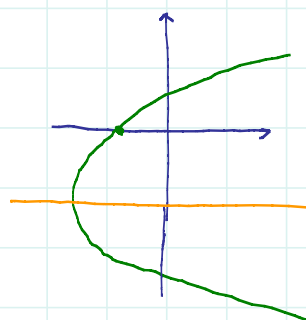
$2\sqrt{2}\sqrt{a}$ (diagonale di un $\square$ con lato $\sqrt{a}$)

$\leadsto 2\sqrt{2}\sqrt{a} = 3 \leadsto$ trovo a unico

(6) La retta $y = a$ è asse della parabola $x+2 = y^2+3y$

La parabola è $x = y^2+3y-2$

Intersezioni con asse y : $y^2+3y-2=0 \leadsto y = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

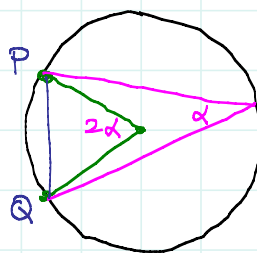


(le radici sono una positiva e una negativa)

$y = -\frac{3}{2}$ (= media delle radici)

Back to lezioni precedenti

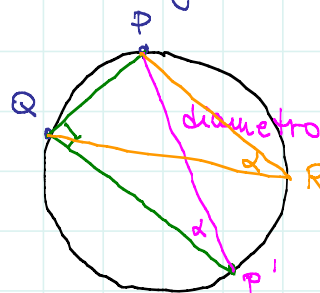
Tutte gli angoli alla circ. sono uguali tra di loro, e quello al centro è il doppio.



Se voglio la lung. di PQ, mi conviene che l'angolo in Q sia retto

$$PQ = 2R \sin \alpha \leadsto \frac{PQ}{\sin \alpha} = 2R$$

↑
diametro



Prendiamo una circ. e un p.to esterno.

Supponiamo che le 2 tang. siano $\perp$

Cosa possiamo dire del raggio.

$\leadsto$ PACB è un quadrato, quindi

$$PC = R\sqrt{2}$$

