Precorso di Matematica 2008

Massimo Gobbino

Degli stessi autori ...

Il seguente elenco è aggiornato al 14 settembre 2010. La collocazione editoriale (casa editrice) è in molti casi ancora in via di definizione. Ulteriori informazioni saranno rese disponibili appena possibile sulla home page di Massimo Gobbino.

[1] M. Gobbino; *Precorso di Matematica 2008.*

Descrizione. Stampato integrale delle lezioni tenute dall'autore durante il Precorso 2008 per Ingegneria, con ripasso della teoria e svolgimento di parecchi esercizi. Si tratta dei prerequisiti *irrinunciabili* per affrontare un qualunque corso di laurea di natura scientifica.

Target. Studenti che iniziano il primo anno di Facoltà scientifiche ed hanno necessità di colmare lacune di base.

[2] M. Ghisi, M. Gobbino; *Esercizi per Precorsi di Matematica*, Società Editrice Esculapio.

Descrizione. Esercizi sugli argomenti di base di matematica: equazioni e disequazioni, polinomi, potenze e logaritmi, geometria piana, solida, analitica, trigonometria.

Target. Studenti che iniziano il primo anno di Facoltà scientifiche e vogliono verificare la solidità della propria preparazione di base e, se necessario, migliorarla.

[3] M. Ghisi, M. Gobbino; *Schede di Analisi Matematica*, Società Editrice Esculapio.

Descrizione. Presentazione schematica (quello che una volta si chiamava un "bignamino") degli argomenti di Analisi Matematica svolti nei corsi di base (calcolo differenziale ed integrale in una e più variabili).

Target. Studenti di tutti i corsi di Analisi Matematica.

[4] M. Ghisi, M. Gobbino; *Esercizi di Analisi Matematica I – Parte A*, Società Editrice Esculapio.

Descrizione. Raccolta di esercizi standard su calcolo differenziale ed integrale in una variabile (limiti, serie, successioni per ricorrenza, studi di funzione, integrali, integrali impropri, equazioni differenziali, numeri complessi).

Target. Per gli studenti dei corsi di servizio (ad esempio nei corsi di laurea in Ingegneria) è più che sufficiente per la preparazione dell'esame. Per gli studenti di corsi in cui l'Analisi Matematica viene trattata in modo più approfondito (ad esempio a Matematica o Fisica) è utile affiancarlo con [6].

[5] M. Ghisi, M. Gobbino; *Esercizi di Analisi Matematica II – Parte A*, Società Editrice Esculapio.

Descrizione. Raccolta di esercizi standard su calcolo differenziale ed integrale in più variabili (punti stazionari di funzioni di più variabili, massimi e minimi in due o tre variabili, moltiplicatori di Lagrange, integrali doppi e tripli, curve, superfici, formule di Gauss-Green e Stokes).

Target. Per gli studenti dei corsi di servizio (ad esempio nei corsi di laurea in Ingegneria) è più che sufficiente per la preparazione dell'esame. Per gli studenti di corsi in cui l'Analisi

Matematica viene trattata in modo più approfondito (ad esempio a Matematica o Fisica) è utile affiancarlo con esercizi meno standard.

[6] M. Ghisi, M. Gobbino; *Esercizi di Analisi Matematica I – Parte B.*

Descrizione. Raccolta di esercizi un po' meno standard su calcolo differenziale ed integrale in una variabile.

Target. Studenti dei corsi di servizio che non si accontentano degli esercizi base [4]. Studenti di corsi in cui l'Analisi Matematica viene trattata in modo più approfondito (ad esempio a Matematica o Fisica).

[7] M. Ghisi, M. Gobbino; *Test d'esame di Analisi Matematica I*, Società Editrice Esculapio.

Descrizione. Raccolta dei test d'esame assegnati in corsi di servizio, con risposte.

Target. Studenti dei corsi di base di Analisi Matematica.

[8] M. Ghisi, M. Gobbino; *Scritti d'esame di Analisi Matematica I*, Società Editrice Esculapio.

Descrizione. Raccolta degli scritti d'esame assegnati in corsi di servizio, con risposte ed "aiutini".

Target. Studenti dei corsi di base di Analisi Matematica. Sicuramente utile anche per studenti di Matematica o Fisica per iniziare la preparazione alla prova scritta.

[9] M. Ghisi, S. Spagnolo; *Prove d'esame di Analisi Matematica I.*

Descrizione. Raccolta degli scritti d'esame assegnati a Matematica e Fisica in corsi su argomenti di Analisi Matematica I (calcolo differenziale e integrale in una variabile), con risposte ed "aiutini".

Target. Studenti di corsi in cui l'Analisi Matematica viene svolta in maniera approfondita.

[10] M. Ghisi, S. Spagnolo; *Prove d'esame di Analisi Matematica II.*

Descrizione. Raccolta degli scritti d'esame assegnati a Matematica e Fisica in corsi su argomenti di Analisi Matematica II (calcolo differenziale e integrale in più variabili), con risposte ed "aiutini".

Target. Studenti di corsi in cui l'Analisi Matematica viene svolta in maniera approfondita.

Indice

Prefazione

Questo fascicolo contiene lo stampato integrale delle lezioni tenute dall'autore durante il Precorso di Matematica per Ingegneria svoltosi all'Università di Pisa nel settembre 2008. Il Precorso si è articolato in 10 lezioni della durata di 3 ore "lorde" ciascuna, svoltesi nell'arco di due settimane. Ogni lezione, a sua volta suddivisa in due sessioni, è stata registrata mediante Tablet PC. I video delle lezioni si possono liberamente scaricare dalla home page dell'autore.

Gli argomenti del Precorso sono le basi di matematica per poter seguire con successo un corso di laurea in Ingegneria. Quello che segue vuole essere solo un elenco indicativo.

- Numeri e algebra. Proprietà delle potenze, delle radici, dei logaritmi.
- Polinomi. Divisione tra poliniomi, radici e fattorizzazione, scomposizioni classiche.
- Equazioni polinomiali, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, con radici e valori assoluti.
- Disequazioni di primo e secondo grado, con prodotti e quozienti, radici, valori assoluti, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche.
- Trigonometria e risoluzione di triangoli.
- Geometria euclidea piana e solida.
- Geometria analitica nel piano. Equazioni di rette, circonferenze, parabole. Insiemi del piano descritti mediante semplici disequazioni o sistemi di disequazioni.

Le lezioni sono focalizzate sulla risoluzione di esercizi sugli argomenti sopra indicati. Ove necessario gli esercizi sono preceduti da brevi richiami della teoria. Questa vuole essere anche una indicazione sul metodo di studio. Di fronte alla teoria è facile dire "io queste cose più o meno le so". Solo risolvendo *in prima persona* parecchi esercizi emergono tutti i propri dubbi e si acquisisce con il tempo padronanza e sicurezza.

D'altra parte, l'esperienza di parecchi anni di insegnamento suggerisce che, senza dubbio, quelle del precorso sono le due settimane più importanti del primo anno. Infatti *errori ed incomprensioni in questi argomenti di base si ripercuotono su quasi tutte le materie, impedendo prima di capire a lezione, poi di affrontare con successo gli esami.*

Pisa, 14 settembre 2010

Massimo Gobbino

FRAZIONI E SEMPLICI EQUAZIONI

a	b	$a+b$	$a \cdot b$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{a+b}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,2}}{5} = \frac{2}{5}$$

— o —

$a = \frac{1}{3}$ $\quad a+b = \frac{1}{2}$ $\quad b = (a+b) - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

$a \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$; $\quad \frac{a}{b} = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$a = \frac{1}{3}$ $\quad a \cdot b = \frac{1}{2}$ $\quad b = \frac{a \cdot b}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

$a+b = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \frac{11}{6}$; $\quad \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,2}}{11} = \frac{2}{11}$$

— o — o —

$a = \frac{1}{3}$ $\quad \underbrace{\frac{a}{b} = \frac{1}{2}}$ $\quad a = \frac{b}{2}$ $\quad 2a = b$ $\quad b = 2a = \frac{2}{3}$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ Moltiplico a dx e sx per 2

$\frac{a}{b} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2$ $\quad \frac{2a}{b} = 1$ Moltiplicando per b "sposto il b a dx"

$a = \frac{1}{3} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2} \qquad \cancel{2}a = \cancel{a}+b \qquad a = b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

— o — o —

$a = 2 \qquad b = \frac{1}{3} \qquad a+b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}; \qquad a \cdot b = \frac{2}{3}$

$\frac{a}{b} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = 6; \qquad \frac{a}{a+b} = 2 : \frac{7}{3} = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$

— o —

$b = 2 \qquad a \cdot b = 3 \qquad a = \frac{3}{b} = \frac{3}{2}; \qquad a+b = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}; \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{7} = \frac{3}{7}$

$b = 2 \qquad \frac{a}{b} = 3 \qquad a = 3b = 6$ resto ...

— o — o —

$b = 2, \quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}. \qquad 3a = a+b \Rightarrow 2a = b, \quad 2a = 2, \quad a = 1$

$3a = a+b$ Aggiungo $-a$ a dx e sx

$\underbrace{3a - a}_{2a} = \cancel{a}+b-\cancel{a} \qquad 2a = b$

— o — o —

$b = \frac{2}{5} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{7}{4} \qquad 4a = 7a + 7b$

$-3a = 7b; \qquad -3a = 7 \cdot \frac{2}{5}; \qquad -3a = \frac{14}{5}; \qquad a = -\frac{14}{15}$

— o — o —

$a = \frac{5}{2} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{3}{5}; \qquad 5a = 3a + 3b; \qquad 2a = 3b$

$b = \frac{2}{3}a = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{2}} = \frac{5}{3}$

$a+b = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}$; $\quad 3a = a+b = \frac{1}{2}$

$3a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{6}$; $\quad b = (a+b) - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

— o —

$a+b = \frac{1}{3}$ $\qquad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$; $\quad a = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$b = (a+b) - a = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

— o —

$a = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{a}{a+b} = \frac{2}{3}$ $\qquad 3a = 2a + 2b$; $\quad a = 2b$

$b = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

— o — o —

$a+b = \frac{1}{3}$; $\quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; sostituisco nella 1ª eq

$2a = b$ $\qquad a + 2a = \frac{1}{3}$; $\quad 3a = \frac{1}{3}$; $\quad a = \frac{1}{9}$

$b = 2a = \frac{2}{9}$

$a+b = \frac{2}{3}$, $\quad a \cdot b = \frac{1}{9}$ $\qquad$ Ricavo b dalla 1ª equazione

$b = \frac{2}{3} - a$ $\quad$ sostituisco nella 2ª:

$a\left(\frac{2}{3} - a\right) = \frac{1}{9}$; $\quad \frac{2}{3}a - a^2 = \frac{1}{9}$ $\qquad$ Moltiplico per 9

$6a - 9a^2 = 1$ $\qquad$ Porto tutto a dx $\qquad 9a^2 - 6a + 1 = 0$

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{\cancel{36 - 36}}}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Quindi $a = \frac{1}{3}$ e poiché $a+b = \frac{2}{3}$, anche $b = \frac{1}{3}$

— o — o —

$a - b = \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{a}{a+b} = \frac{2}{7} \longrightarrow$ $7a = 2a + 2b$, $\quad 5a = 2b$

$b = \frac{5}{2}a \rightarrow$ sostituisco nella 1ª

$a - \frac{5}{2}a = \frac{3}{4}$, $\quad a\left(1 - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}$; $\quad -\frac{3}{2}a = \frac{3}{4}$; $\quad a = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} = -\frac{1}{2}$

$b = a - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$

Verifica $\quad a-b = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{-2+5}{4} = \frac{3}{4}$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}} = \frac{+\frac{1}{2}}{+\frac{2+5}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

—o—o—

$$\underbrace{\frac{a+b}{a-b} = \frac{2}{7}}_{1^a \text{ EQ.}} \qquad \underbrace{\frac{b}{a+b} = \frac{7}{2}}_{2^a \text{ EQ}}$$

1^a EQ: $7a + 7b = 2a - 2b$

$5a = -9b$

2^a EQ: $2b = 7a + 7b$

$7a = -5b$

Mettendo insieme ottengo

$a = -\frac{9}{5}b$ $\qquad +\frac{9}{5}b = +\frac{5}{7}b \qquad 63b = 25b$

$a = -\frac{5}{7}b$

$38b = 0 \qquad b = 0 \qquad a = -\frac{9}{5}b = 0$

Ma le frazioni non avrebbero senso $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

$7 \geq 5$ VERA! $\qquad 7 > 5$ VERA! $\qquad 7 = 5$ FALSA!

$1999 \geq 1999$ VERA!

$-1999 < -2000$ FALSA! $\qquad -2000 \quad -1999$

$-2000 < -1999$

Se $x^2 > 0$, allora $x > 0$ FALSA! Per esempio $x = -2$

Se $x \geq 3$, allora $x^2 \geq 9$ VERA

Se $x \geq 3$, allora $x^2 > 0$ VERA (a maggior ragione!)

Se $x \geq 3$, allora $x^2 \geq -7$ VERA

Se $x > 3$, allora $x^2 \geq 9$ VERA $\quad$ e implica

Se $x > 3$, allora $x^2 > 9$ VERA

Se $x < 3$, allora $x^2 < 9$ FALSA: per esempio $x = -327$ (< 3, ma il suo $\square$ è ≥ 9)

Esiste $\overset{\text{ALMENO UN}}{x} \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 \leq 0$ VERA: Esiste ed è $x = 0$

POTENZE E RADICI

Titolo nota 15/09/2008

$\boxed{A^{\otimes}}$ ← ESPONENTE

↑ BASE

$\boxed{1^{\circ}\text{ CASO}}$ BASE QUALUNQUE

ESPONENTE INTERO POSITIVO (>0) A^n

$$\boxed{A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}}}$$

<u>Esempi</u>

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$1^6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$0^7 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$; $(-1)^5 = -1$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

$(-1)^{2008} = 1$

<u>Proprietà</u>

1. $\boxed{A^m \cdot A^n = A^{m+n}}$

$$A^m \cdot A^n = \underbrace{\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}}}_{m+n} = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m+n \text{ volte}} = A^{m+n}$$

2. $\boxed{(A^m)^n = A^{m \cdot n}}$

$$(A^m)^n = \underbrace{A^m \cdot A^m \cdot \ldots \cdot A^m}_{n \text{ volte}}$$

$$= \overbrace{\underbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}_{m} \cdot \underbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}_{m} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}_{m}}^{n \text{ blocchi di } m\ A} = A^{m \cdot n}$$

③ $\boxed{\dfrac{A^m}{A^n} = A^{m-n}}$ Richiede (per ora) $m > n$

e per sempre $A \neq 0$

$$\frac{A^m}{A^n} = \frac{\overbrace{A \cdot \ldots \cdot A}^{m}}{\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n}}$$

semplifico quello che si può e avanzano sopra $m-n$ A

$$= A^{m-n}$$

Esempio: $\dfrac{A^8}{A^5} = \dfrac{A \cdot A \cdot A \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A}}{\cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A}} = A^3$

④ $\boxed{A^n \cdot B^n = (AB)^n}$ Serve che l'esponente sia sempre lo stesso

$$A^n \cdot B^n = \overbrace{A \cdot \ldots \cdot A}^{n} \cdot \overbrace{B \cdot \ldots \cdot B}^{n} = \overbrace{(A \cdot B)(A \cdot B) \cdot \ldots \cdot (A \cdot B)}^{n}$$

$$= (A \cdot B)^n$$

---

⑤ $A^n \pm B^n$
$A^n \pm A^m$] NULLA DI FURBO

Esempi 1 $\dfrac{10^7}{10^3} = 10^4$; 2 $\dfrac{1000 \cdot 10^3}{100^2}$

$$\frac{1000 \cdot 10^3}{100^2} = \frac{10^3 \cdot 10^3}{(10^2)^2} = \frac{10^6}{10^4} = 10^2 = 100$$

3 $1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3000}$

4 $\dfrac{100^{100}}{200} = \dfrac{100^{100}}{2 \cdot 100} = \dfrac{1}{2} \dfrac{100^{100}}{100} = \dfrac{1}{2} 100^{99}$

Usando potenze di 2 e di 5 $100^{100} = (10^2)^{100} = 10^{200} = 2^{200} \cdot 5^{200}$

$200 = 2 \cdot 100 = 2^3 \cdot 5^2 \Rightarrow \dfrac{100^{100}}{200} = \dfrac{2^{200} \cdot 5^{200}}{2^3 \cdot 5^2} = 2^{197} \cdot 5^{198}$

$\boxed{5}$ $$\frac{1000^{100}}{100^{1000}} = \frac{(10^3)^{100}}{(10^2)^{1000}} = \frac{10^{300}}{10^{2000}} = \frac{1}{10^{1700}}$$

$\boxed{6}$ $$\frac{200^{200}}{400^{100}}$$

$200 = 2\cdot 100 = 2^3\cdot 5^2$

$400 = 2^4\cdot 5^2$

$$\frac{200^{200}}{400^{100}} = \frac{(2^3\cdot 5^2)^{200}}{(2^4\cdot 5^2)^{100}} = \frac{(2^3)^{200}\cdot(5^2)^{200}}{(2^4)^{100}\cdot(5^2)^{100}} =$$

$$= \frac{2^{600}\cdot 5^{400}}{2^{400}\cdot 5^{200}} = 2^{600-400}\cdot 5^{400-200} = 2^{200}\cdot 5^{200}$$
$$= 10^{200}$$

Altro modo: $200 = 2\cdot 100$ $\quad 400 = 2^2\cdot 100$

$$\frac{200^{200}}{400^{100}} = \frac{(2\cdot 100)^{200}}{(2^2\cdot 100)^{100}} = \frac{\cancel{2^{200}}\cdot 100^{200}}{\cancel{2^{200}}\cdot 100^{100}} = 100^{100}$$

$\boxed{2^\circ \text{ CASO}}$ ESPONENTE $=0$ $\qquad A^0 = 1$

BASE $\neq 0$

Valgono le stesse proprietà di sopra; in particolare

$$\frac{A^n}{A^n} = \frac{A\cdot\ldots\cdot A}{A\cdot\ldots\cdot A} = \text{si semplifica tutto e viene } 1$$
$$= A^{n-n}$$

Se vogliamo conservare la proprietà 3, porre $A^0 = 1$ è l'unica possibilità.

$\boxed{3^\circ \text{ CASO}}$ ESPONENTE INTERO NEGATIVO

BASE $\neq 0$

$$\boxed{A^{-n} = \frac{1}{A^n}}$$ n intero >0

Tutte le proprietà restano valide

Esempi $\boxed{1}$

$$7^{-7}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^5=\frac{1}{7^7}\cdot\frac{1}{7^5}=\frac{1}{7^{12}}$$

$$7^{-7}\cdot\underbrace{(7^{-1})^5}_{\text{potenza di potenza}}=7^{-7}\cdot\underbrace{7^{-5}}=7^{-12}=\frac{1}{7^{12}}$$

$A^m\cdot A^n=A^{m+n}$

$\boxed{2}$ $7^{-3}:7^{-12}=7^{-3-(-12)}=7^{-3+12}=7^9$

In alternativa

$$\frac{1}{7^3}:\frac{1}{7^{12}}=\frac{1}{7^3}\cdot 7^{12}=7^{12-3}=7^9$$

$\boxed{3}$ $(12^{-12}:4^{-4})\cdot 3^{-3}=\left(\frac{1}{12^{12}}:\frac{1}{4^4}\right)\cdot\frac{1}{3^3}=$

$$=\frac{1}{12^{12}}\cdot 4^4\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{1}{(3\cdot 4)^{12}}\cdot 4^4\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3^{12}}\cdot\frac{1}{4^{12}}\cdot 4^4\cdot\frac{1}{3^3}$$

$$=\frac{1}{3^{15}}\cdot\frac{1}{4^8}=3^{-15}\cdot 4^{-8}=3^{-15}\cdot 2^{-16}.$$

$\boxed{\text{ACHTUNG !}}$ Torri di esponenziali vs potenza di potenza

$$2^{3^2}=2^9=2^{(3^2)}\qquad\underbrace{(2^3)^2=2^6}_{\text{POTENZA DI POTENZA}}$$

— o — o —

$\boxed{4^\circ\text{ CASO}}$ $A>0$ n intero positivo (ESPONENTE = frazione con num. = 1)

$$\boxed{A^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{A}}$$

dove $\sqrt[n]{A}$ è l'unico numero $x>0$ tale che $x^n=A$

Esempi $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{8}=\boxed{2}$ è l'unico $x>0$ t.c. $x^3=8$

$\sqrt{4}=\boxed{2}$ è l'unico $x>0$ t.c. $x^2=4$

L'equazione $x^2 = 4$ ha 2 soluzioni $x = 2$ e $x = -2$
(per definire $\sqrt{4}$ ci interessa quella positiva)

$\sqrt[4]{16} = 2$ (l'eq. $x^4 = 16$ ha 2 soluz. $x = 2$ e $x = -2$
ma ci interessa solo $x = 2$)

Proprietà: le stesse del caso a esponente intero.

$\boxed{\text{NB}}$ La definizione è data in modo da estendere le proprietà

USO DEFINIZIONE

Potenza di potenza $\left(A^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A^n} = A$

USO POTENZA DI POTENZA

$\left(A^n\right)^{\frac{1}{n}} = A^{\cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}} = A^1 = A$

$\boxed{5^\circ \text{ caso}}$ $\boxed{A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}}$

BASE $A > 0$
ESPONENTE: frazione qualunque

Volendo: $A^{\frac{m}{n}} = \left(A^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(A^m\right)^{\frac{1}{n}}$

$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}$

Esercizi $\boxed{1}$ $\sqrt[a]{16} = 2$; $16^{\frac{1}{a}} = 2$; $\left(2^4\right)^{\frac{1}{a}} = 2$

$2^{\frac{4}{a}} = 2^1$ $\quad \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$

$\boxed{2}$ $\sqrt[4]{a} = 3$; $a^{\frac{1}{4}} = 3$ Elevo alla 4^a a dx e sx

$\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = (3)^4$ $\quad a^1 = 3^4 \Rightarrow a = 3^4 = 81$

$\boxed{3}$ $a^{\frac{1}{2}} = 5$ $\quad \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (5)^2$ $\quad \Rightarrow \quad a = 5^2 = 25$

$\boxed{4}$ $a^{3/2} = 27$ $\quad \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}$ $\quad a = 3^{\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}} = 3^2 = 9$

$\boxed{5}$ $a^{-1/2} = \frac{1}{4}$ $\quad \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = \left(2^{-2}\right)^{-2}$; $\quad a = 2^4 = 16$

$\boxed{6}$ $8^a = 4$ $\quad (2^3)^a = 2^2$ $\quad 2^{3a} = 2^2,$ $\quad 3a = 2,$ $\quad a = \frac{2}{3}$

$\boxed{7}$ $\sqrt[a]{16} = 8$; $\quad 16^{\frac{1}{a}} = 8,$ $\quad (2^4)^{\frac{1}{a}} = 2^3$; $\quad 2^{\frac{4}{a}} = 2^3$

$\frac{4}{a} = 3$ $\quad a = \frac{4}{3}$

$\boxed{8}$ $2^{20} - 2^{19}$ $\quad \boxed{= 2^{20-19} = 2^1 = 2}$ NO !!!!!

$2^a - 2^b$ NON È 2^{a-b}

$2^{20} = 2^{1+19} = 2^1 \cdot 2^{19} = 2 \cdot 2^{19}$

$2^{20} - 2^{19} = 2 \cdot 2^{19} - 2^{19} = 2^{19}$

$2B - B = B$

$\boxed{9}$ $3^8 + 3^8 + 3^8 = 3 \cdot 3^8 = 3^1 \cdot 3^8 = 3^{1+8} = 3^9$

$3^8 + 3^8 = 2 \cdot 3^8$

ESERCIZI SULLE POTENZE

Titolo nota 16/09/2008

A^x

x intero positivo — A qualunque

x intero ≤ 0 — $A \neq 0$

x non intero — $A > 0$

$$A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$$

Proprietà

1. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$
2. $\dfrac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$
3. $(A^m)^n = A^{mn}$
4. $A^m \cdot B^m = (AB)^m$

$A^m \pm A^n$, $A^m \pm B^m$ — Nulla di Furbo

Esercizi

$\boxed{1}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{a}$ $\quad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \underset{\text{propr. 4}}{=} 10^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \quad a = 10$

$\boxed{2}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 = \sqrt{4} \Rightarrow a = 4$

$\boxed{3}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[a]{6}$ $\quad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \overset{4}{=} 6^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow a = 2$

$\boxed{4}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{a}$ $\quad \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \left(a^{\frac{1}{\cancel{4}}}\right)^{\cancel{4}} = a$

$$a = \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^4 \underset{4}{=} \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^4 \underset{3}{=} 6^2 = 36$$

$\boxed{5}$ $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{3}{=} 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

$\boxed{6}$ $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{3}{=} 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

$\boxed{7}$ $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \left((27)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\boxed{8}$ $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{a}$; $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}$, $2^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}}$

elevo alla 8ª: $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8 = a$, $2^2 = a = 4$.

$\boxed{9}$ $\sqrt{2\sqrt{2}} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{①}{=} \left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$

$2^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{a}}$, $2^{\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{a}} = 2^{\frac{3}{a}} \Rightarrow a = 4$

$\boxed{10}$ $\sqrt{4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \left(2^{2+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{4}}$

$2^{\boxed{\frac{5}{4}}} = \sqrt{2^a} = 2^{\boxed{\frac{a}{2}}} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

In alternativa: $4\sqrt{2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32}$ $\left(16^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)$

$\boxed{11}$ $3\sqrt{7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{63}$ $9^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} \overset{④}{=} (9 \cdot 7)^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{12}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \overset{①}{=} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{6+4+3}{12}} = 2^{\frac{13}{12}}$

$\boxed{13}$ $\sqrt[6]{8} = \sqrt[a]{4}$, $(2^3)^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{a}}$, $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{a}}$, $\frac{1}{2} = \frac{2}{a}$, $a = 4$

N.B. $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$

$\boxed{14}$ $\sqrt[3]{2} : \sqrt[6]{a} = 2^{-1}$, $2^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{6}} = 2^{-1}$, $\frac{2^{1/3}}{a^{1/6}} = \frac{1}{2}$

$2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$, $2^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$ elevo alla sesta:

$\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^6 = a \Rightarrow a = 2^8 = 256$

$\boxed{15}$ $\sqrt{100^{100}} = \left(100^{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{100^{50}}$; $\left(100^{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(100^{\frac{1}{2}}\right)^{100} = \boxed{10^{100}}$

STESSA COSA

$\boxed{16}$ $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}}$ $\qquad 2\sqrt{3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{12}$; $\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{12}}$

$$\sqrt{3\sqrt{\sqrt{12}}} = \sqrt{3\sqrt[4]{12}} = \sqrt{\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{12}} = \sqrt{\sqrt[4]{81\cdot 12}} = \sqrt[8]{81\cdot 12}$$
$$= \sqrt[8]{972}$$

$\boxed{17}$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt[a]{4} = 2$, $\quad 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{a}} = 2^1$, $\quad 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{a}} = 2^1$

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

$\boxed{18}$ $\sqrt{2}+\sqrt{2} = \sqrt{a}$, $\quad \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{8}$

$\boxed{19}$ $\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{2^a}\cdot\sqrt[4]{8} = 8$, $\quad 2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{a}{3}}\cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^3$

$\Rightarrow \frac{3}{2}+\frac{a}{3}+\frac{3}{4} = 3$ e da qui si ricava a

$\boxed{20}$ $\sqrt{32}-\sqrt{2} = \sqrt{a}$ (Non pensare nemmeno $\sqrt{30}$!!!)

$$\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} \overset{4}{=} \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32}-\sqrt{2} = 4\sqrt{2}-\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$\boxed{21}$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{a}$, $\quad 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$ elevo alla sesta:

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = a = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6\cdot\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^3\cdot 3^2 = 8\cdot 9 = 72$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{72}$$

In alternativa: $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$ $\qquad 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$ $\qquad 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}}$ $\qquad$ stesso esponente

Quindi $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \overbrace{\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9}} = \sqrt[6]{72}$ $\quad \left[8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{1}{6}} \overset{4}{=} 72^{\frac{1}{6}}\right]$

POLINOMI E SCOMPOSIZIONI

$p(x) = x^4 + 3x^2 + 6x - 25$ grado 4 (massimo esponente della x)

$p(x)$ ha grado m
$q(x)$ ha grado n $\Rightarrow$ $p(x) \cdot q(x)$ ha grado $m+n$
$p(x) \pm q(x)$ ha grado $\leq$ del massimo fra m ed n

Grado della somma: • Se $m \neq n$, allora $p(x) \pm q(x)$ ha come grado il max fra i 2 gradi
- Se $m = n$ il grado di $p(x) + q(x)$ può anche scendere, il che accade se i due termini di grado max "si semplificano"

$p(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ $\qquad$ $q(x) = -x^3 + 6x^2 + 7$

$p(x) + q(x) = 7x^2 - 2x + 8$

Esempio $p(x) = 2x^2 - 3$ $\qquad$ $q(x) = x + 2$

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 - 3)(x+2) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 6$$

Radice di un polinomio Sono quei valori a t.c. $p(a) = 0$

N.B. I polinomi non hanno nec. coeff interi

$$\left(2x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{5}{2}x - 3\right) = 2x^3 + 5x^2 - 6x + \frac{x^2}{3} + \frac{5}{6}x - 1$$

Radici di un pol. di 2° grado $\qquad$ $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$\nearrow$ $\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 soluzioni reali e distinte
$\rightarrow$ $\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 soluzione reale di molteplicità 2
$\searrow$ $\Delta < 0 \Rightarrow$ 0 soluzioni reali

SCOMPOSIZIONI E POTENZE

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $\left[= a^3+\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{ba^2}-\cancel{ab^2}-b^3\right]$

$a^4-b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$a^5-b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$a^6-b^6 = (a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$

... e così via ...

Se c'è il segno $+$:

a^2+b^2 NULLA DI FURBO

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ $\left[= a^3-\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}+\cancel{ba^2}-\cancel{ab^2}+b^3\right]$

a^4+b^4 NULLA

$a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

a^6+b^6 NULLA

$a^7+b^7 = (a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

... e così via...

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \qquad (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+\underbrace{ab+ba}+b^2 = a^2+b^2+2ab$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$[\text{Mostro}]^2$ = somma di tutti i quadrati + somma di tutti i doppi prodotti

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$

[Per esercizio dimostrarla calcolando $(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$]

$[\text{Mostro}]^3$ = somma di tutti i cubi + somma di tutti i tripli prodotti + 6 volte tutti i prodotti a 3 a 3

$(a+b)^4 = a^4 + \boxed{4} a^3 b + \boxed{6} a^2 b^2 + \boxed{4} a b^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA:
ogni numero è la somma dei 2 che "stanno sopra"

						1		1					$(a+b)^1 = (a+b)$
					1		2		1				$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
				1		3		3		1			$(a+b)^3 =$
			1		4		6		4		1		$(a+b)^4 =$
		1		5		10		10		5		1	
	1		6		15		20		15		6	1	$(a+b)^6$

$(a+b)^6 = a^6 + 6 a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + b^6$

<u>Scomposizioni</u>

$(a^3 - 1) = (a-1)(a^2 + a + 1)$ $\quad b=1$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $\quad b=2$

$a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ $\qquad a^3 - 8 = (a-2)(a^2 + 2a + 4)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$ $\qquad a^4 - 1 = (a-1)(a^3 + a^2 + a + 1)$ $\quad b=1$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3)$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)\boxed{(a+b)(a^2+b^2)}$$
$$= (a-b)\boxed{(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3)}$$

STESSA COSA

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + a b^4 + b^5)$$
$$= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2 b^2 + b^4)$$

$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3$

DIVISIONE TRA POLINOMI
EQUAZIONI POLINOMIALI

Titolo nota 16/09/2008

Dati 2 polinomi $A(x)$ e $B(x)$ la divisione tra $A(x)$ e $B(x)$ consiste nel trovare 2 polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{resto}}$$

dove il grado di $R(x)$ è <u>MINORE</u> (stretto) del grado di $B(x)$.

Come si trovano $Q(x)$ ed $R(x)$? Facendo la "divisione per colonne"

$$\begin{array}{rrrr|l}
\multicolumn{4}{l|}{A(x)} & \\
\boxed{x^3} & \boxed{+2x^2} & \boxed{-3x} & \boxed{+1} & \boxed{x^2+2} \; B(x) \\
\cline{5-5}
-x^3 & & -2x & & \boxed{x+2} \; Q(x) \\
\cline{1-4}
// & 2x^2 & -5x & +1 & \\
 & -2x^2 & & -4 & \\
\cline{2-4}
 & // & \multicolumn{2}{r}{\boxed{-5x-3}} & \\
 & & \multicolumn{2}{r}{R(x)} &
\end{array}$$

Verifica:

$$\underbrace{x^3+2x^2-3x+1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2+2)}_{B(x)}\underbrace{(x+2)}_{Q(x)} + \underbrace{(-5x-3)}_{R(x)}$$

<u>Esempio 2</u> Voglio dividere x^5+2x^2-3 per x^2-x+1

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & & +2x^2 & & -3 & x^2-x+1 \\
\cline{7-7}
-x^5 & +x^4 & -x^3 & & & & \boxed{x^3+x^2+1} \; Q(x) \\
\cline{1-6}
// & x^4 & -x^3 & +2x^2 & & -3 & \\
 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & // & // & x^2 & & -3 & \\
 & & & -x^2 & +x & -1 & \\
\cline{4-6}
 & & & // & \boxed{x} & \boxed{-4} & \\
 & & & & \multicolumn{2}{c}{R(x)} &
\end{array}$$

Verifica:

$$x^5+2x^2-3 = (x^2-x+1)(x^3+x^2+1) + (x-4)$$

(FARE PER ESERCIZIO)

Esempio 3

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +6x^3 & +4x^2 & +x & +1 & 2x^2+3x+1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & -6x^3 & -2x^2 & & & 2x^2+1 \\ \cline{1-5}
// & // & 2x^2 & +x & +1 & \\
 & & -2x^2 & -3x & -1 & \\ \cline{3-5}
 & & // & \boxed{-2x} & & R(x)
\end{array}
$$

Esempio 4 Dividere x^3+1 per $x+1$. Non serve fare la divisione perché

$$\underbrace{x^3+1}_{A(x)} = \underbrace{(x+1)}_{B(x)}\underbrace{(x^2-x+1)}_{Q(x)} + \underbrace{0}_{R(x)}$$

Esempio 5 Dividere x^3+1 per $x-1$. Il resto ha per forza grado minore del grado di $B(x)$, dunque in questo caso grado di $R(x)$ è 0, dunque sarà un numero

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & +1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & \boxed{x^2+x+1}\ Q(x) \\ \cline{1-4}
// & +x^2 & & +1 & \\
 & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-4}
 & // & x & +1 & \\
 & & -x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & // & \boxed{2} & R(x)
\end{array}
$$

Esempio 6

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^5 & & +x^3 & & +3 & x^3-2x^2 \\ \cline{6-6}
-x^5 & +2x^4 & & & & x^2+2x+5 \to Q(x) \\ \cline{1-5}
// & 2x^4 & +x^3 & & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & & & \\ \cline{2-5}
 & // & 5x^3 & & +3 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & & \\ \cline{3-5}
 & & // & 10x^2 & +3 & \leftarrow R(x)
\end{array}
$$

Equazioni polinomiali

$\boxed{1}$ $2x^2-8x=0$ $\quad 2x(x-4)=0 \quad x=\begin{cases}0\\4\end{cases}$

$\boxed{2}$ $2x^2-8=0$, $\quad x^2=4$, $\quad x=\begin{cases}2\\-2\end{cases}$

$\boxed{3}$ $x^2-7x+12=0 \quad x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\dfrac{7\pm1}{2}\begin{cases}4\\3\end{cases}$

Se un'equazione di 2° grado ha 2 radici a e b, vuol dire che il polinomio si fattorizza nella forma

$$(x-a)(x-b)$$

Nell'esempio le radici erano $x=4$ e $x=3$ e infatti

$$(x-3)(x-4) = x^2-4x-3x+12 = x^2-7x+12$$

$$(x-a)(x-b) = x^2-bx-ax+ab = x^2-(a+b)x+ab$$

Prodotto radici = termine noto

Somma radici = coeff. di x cambiato di segno

$x^2-7x+12=0 \quad$ Prodotto $=12$, Somma $=7$ $\Rightarrow x_{1,2}\begin{cases}3\\4\end{cases}$

— o — o —

$x^2-x-6=0 \quad$ Prodotto $=-6$ $\quad$ Somma $=1$

Radici : 3 e -2

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

— o — o —

ACHTUNG! Quanto detto vale SOLO quando il coeff. di x^2 è uguale a 1.
Pur di dividere posso sempre portarmi in questa situazione.

— o — o —

$x^2-4x+4=0 \quad (x-2)^2=0 \quad \Delta=0 \quad x=2$ radice di molteplicità 2.

BIQUADRATICHE, BICUBICHE, ...

$\boxed{1}$ $x^4-5x^2+4=0$ Pongo $t=x^2$ L'equazione diventa

$t^2-5t+4=0$ Risolvo in t $(P=4, S=5) \Rightarrow t = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

Torno in x risolvendo $x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$
$x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

L'eq. iniziale ha 4 soluzioni

$\boxed{2}$ $x^4-5x^2+6=0$ Pongo $t=x^2$
$t^2-5t+6=0$ $(S=5, P=6)$ $t = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$
$x^2=3 \rightarrow x=\pm\sqrt{3}$
$\rightarrow$ in totale 4 soluzioni

$\boxed{3}$ $x^4+3x^2-4=0$ Pongo $t=x^2$
$t^2+3t-4=0$ $(S=-3, P=-4)$ $t = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$
$x^2=-4 \rightarrow$ NULLA
$\rightarrow$ in totale 2 soluzioni

In termini di scomposizione $t^2+3t-4=(t-1)(t+4)$
quindi

$$x^4+3x^2-4 = (x^2-1)(x^2+4) = \underbrace{(x+1)(x-1)}_{\text{si vedono le radici } x=1 \text{ e } x=-1}\underbrace{(x^2+4)}_{\text{Non produce radici (reali)}}$$

— o — o —

$\boxed{4}$ $x^4-4x^2+4=0$ $t=x^2$ $t^2-4t+4=0$

Unica radice: $t=2$ $x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \rightarrow$ 2 radici

$x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2=(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2$

Le radici $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ hanno molteplicità 2

5 $x^3-2x^2+x=0$ $\quad x(x^2-2x+1)=0$

$x(x-1)^2=0$

radice $x=0$ → MOLTEPLICITÀ 1

radice $x=1$ → MOLTEPLICITÀ 2

6 $x^3-2x+1=0$ Si trova una radice a occhio ?

SI !! $x=1$ (se sostituisco $x=1$ viene 0)

Ma allora il polinomio è divisibile per $x-1$. Divido :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & -2x & +1 & x-1 \\ -x^3 & +x^2 & & & x^2+x-1 \\ \hline // & x^2 & -2x & +1 & \\ & -x^2 & +x & & \\ \hline & // & -x & +1 & \\ & & +x & -1 & \\ \hline & & \boxed{//} & \boxed{//} & \end{array}$$

DOVEVA VENIRE 0

Fattorizzazione :

$$x^3-2x+1=\underbrace{(x-1)}_{\text{produce radice } x=1}(x^2+x-1)$$

$x^2+x-1=0$ produce altre 2 radici (forse)

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Quindi in tutto ci sono 3 soluzioni

— o — o —

Come trovare le radici a occhio ?

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

sia un polinomio a coeff. INTERI. Se questo polinomio ha una radice razionale (cioè una frazione $\frac{m}{n}$, con m,n interi) allora $\boxed{m \text{ divide } a_0}$ ed $\boxed{n \text{ divide } a_n}$

Quindi i tentativi da fare sono un numero finito

Esempio 1 $\quad x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Se c'è una radice del tipo $\frac{m}{n}$, allora
- m divide 6
- n divide 1

Quindi i tentativi da fare sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Esempio 2 $\quad 3x^3 - 5x^2 + 7x + 3 = 0$

- m divide 3
- n divide 3

Tentativi : ± 3, $\pm \frac{1}{3}$, ± 1

Esempio 3 $\quad 18x^4 - 45x^3 + 16x^2 + 5x - 2 = 0$

- m divide -2
- n divide 18

Tentativi : $\pm 1, \pm 2$

$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{2}$

$\pm \frac{1}{6}$

$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}$

$\pm \frac{1}{18}$

— o —

E se a occhio non si trova nulla? Allora non ci sono frazioni tra le radici, e non è + precorso !!!

Ripasso EQUAZIONI POLINOMIALI

Titolo nota 17/09/2008

① I o II grado → risolve facilmente

② Biquadratica, bicubica, ... : si pone $t = x^2$, $t = x^3$, $t = x^4$, ... e diventa di II grado. Si risolve in t e poi si torna in x

③ Altri casi in cui è di grado > II : si spera di trovare una radice razionale $\frac{m}{n}$. Se si trova poi si divide per $x - \frac{m}{n}$ e si scende di grado

④ Come si trova una radice razionale? Provando tutte le frazioni $\frac{m}{n}$ in cui
- m è un divisore del termine noto
- n è un divisore del coeff. del termine di grado max

Queste frazioni sono un numero finito.

⑤ Se non c'è la radice razionale, sono guai.

⑥ Trovare le soluzioni equivale a fattorizzare il polinomio. Se a, b, c sono radici di un polinomio, allora il polinomio è divisibile per $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Esempio 1 $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$ Bicubica $t = x^3$

$t^2 + 5t + 6 = 0$ (Somma: -5, Prodotto: 6)

Radici in t: $t = -2$, $t = -3$

Ritorno in x:

$x^3 = -2 \to x = -\sqrt[3]{2}$

$x^3 = -3 \to x = -\sqrt[3]{3}$

2 soluzioni

In termini di scomposizioni:

$$t^2 + 5t + 6 = (t+2)(t+3)$$
$$x^6 + 5x^3 + 6 = (x^3+2)(x^3+3)$$

$$x^3+2 = (x+\sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4})$$
$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \qquad A = x,\ B = \sqrt[3]{2}$$
$$x^3+3 = (x+\sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}\,x + \sqrt[3]{9}) \qquad A = x,\ B = \sqrt[3]{3}$$

Esempio 2 $(x^4+1)(x^2+2x)=0 \iff \underbrace{x}_{x=0}\underbrace{(x+2)}_{x=-2}\underbrace{(x^4+1)}_{\text{NULLA}}=0$

$\to$ 2 soluzioni $x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

Esempio 3 $3x^3-5x^2+7x+3=0$

Cerco una radice del tipo $\frac{m}{n}$, in cui m divide 3 ed n divide 3

$\Rightarrow$ Le possibili radici razionali sono $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{3}$

± 1 non vanno bene. Provo ± 3: $\pm 81 - 45 \pm 21 + 3 \overset{?}{=} 0$ NO

Provo $\pm \frac{1}{3}$: $\pm \frac{1}{9} - \frac{5}{9} \pm \frac{7}{3} + 3 \overset{?}{=} 0$

con il $+$: $\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{7}{3} + 3 = \frac{1-5+21+27}{9} \neq 0$

con il $-$: $= \frac{-1-5-21+27}{9} = 0$

Quindi $x = -\frac{1}{3}$ è una radice del polinomio. Quindi il polinomio è divisibile per $x+\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -5x^2 & +7x & +3 & x+\frac{1}{3} \\ \hline
-3x^3 & -x^2 & & & 3x^2-6x+9 \\ \hline
// & -6x^2 & +7x & +3 & \\
 & +6x^2 & +2x & & \\ \hline
 & // & 9x & +3 & \\
 & & -9x & -3 & \\ \hline
 & & // & // &
\end{array}$$

Quindi:

$$3x^3-5x^2+7x+3 = \left(x+\frac{1}{3}\right)3(x^2-2x+3)$$
$$= (3x+1)(x^2-2x+3)$$

Le soluzioni dell'eq. originaria sono

- $x = -\frac{1}{3}$
- le radici di x^2-2x+3: $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$ $\quad \Delta < 0$ nessuna soluz. reale

$\Rightarrow$ l'unica soluz. reale è $x = -\frac{1}{3}$

DISEQUAZIONI

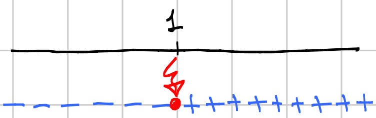
Una disequazione si presenta nella forma $f(x) \geq 0$ $f(x) \leq 0$
$f(x) > 0$ $f(x) < 0$

Risolvere la disequazione significa sostanzialmente studiare il segno della funzione $f(x)$, cioè dividere i numeri x in 4 gruppi:

- gli x per cui $f(x) > 0$
- gli x per cui $f(x) = 0$
- " " " " $f(x) < 0$
- gli x per cui $f(x)$ NON È DEFINITA.

Esempio $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$f(x) > 0$ per $x > 1$
$f(x) = 0$ MAI
$f(x) < 0$ per $x < 1$
$f(x)$ non è definita per $x = 1$



Disequazioni di I grado

$\boxed{1}$ $3x \geq 6$, $x \geq 2$ (moltiplico dx e sx per $\frac{1}{3}$)

$\boxed{2}$ $3x \geq -6$, $x \geq -2$ (come sopra)

$\boxed{3}$ $-3x \geq 6$, $x \leq -2$ (moltiplico dx e sx per $-\frac{1}{3}$, ma INVERTO IL VERSO DELLA DISEQUAZ.)

ACHTUNG! Per le equazioni possiamo moltiplicare dx e sx per una stessa quantità purchè $\neq 0$

Nelle diseq. possiamo moltiplicare IMPUNEMENTE per roba > 0, e moltiplicare per roba < 0 PUR DI GIRARE il VERSO.

$\boxed{4}$ $-3x < -6$ Moltiplico per -1 (quindi cambio verso)

$3x > 6$ Moltiplico per $\frac{1}{3}$ (quindi conservo il verso)

$x > 2$

$\boxed{5}$ $3(2x+5) > -7x+3$ Faccio un po' di conti

$6x+15 > -7x+3$ Sposto dx ⇔ sx

$13x > -12$ Moltiplico per $\frac{1}{13}$

$x > -\frac{12}{13}$

<u>SISTEMI DI DISEQUAZIONI</u>

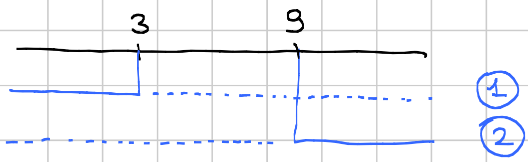
$$\begin{cases} 2x+3 > 3x & (1) \\ x-2 > 7 & (2) \end{cases}$$

Risolvere il sistema vuol dire trovare gli x per cui la (1) e la (2) sono verificate contemporaneamente. Come si risolve?

- Risolvo (1) e (2) separatamente
- Considero la "zona comune"

(1) $2x+3 > 3x$, $3 > x$, $x < 3$ (2) $x-2 > 7$, $x > 9$

Rappresento le 2 soluzioni in uno schema



Non c'è zona comune, quindi il sistema non ha soluzioni (la soluzione del sistema è $\emptyset$)

— o — o —

$$\begin{cases} 3x > 5 & (1) \\ 2x-4 > x & (2) \\ 2x < 40 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 5/3 \\ x > 4 \\ x < 20 \end{cases}$$

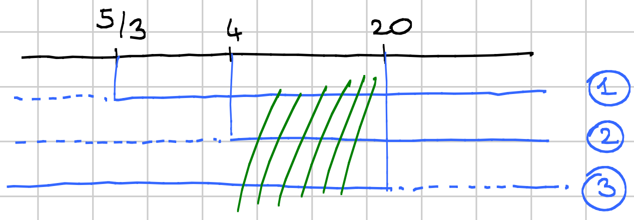
Soluzione sistema:

$4 < x < 20$

$\underbrace{(4,20)}$

intervallo con estremi 4 e 20 (estremi esclusi)

$]4,20[$



zona comune

DISEQUAZIONI DI II GRADO $\quad ax^2+bx+c \;\square\; 0$

$>$ $\geq$ $<$ $\leq$

$\boxed{1^a \text{ cosa}}$: si può sempre fare in modo che $a>0$ (se è negativo cambio i segni e inverto i versi)

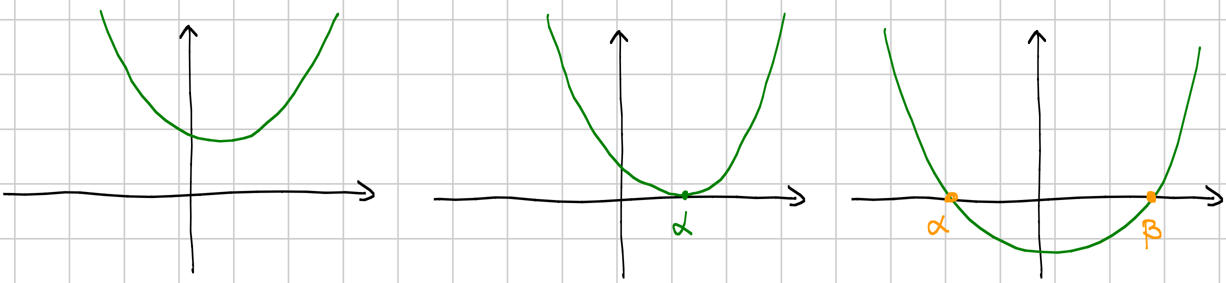
$\boxed{2^a \text{ cosa}}$: guardo il segno di $\Delta = b^2-4ac$. Ho 3 casi (sempre assumo $a>0$)

- se $\Delta<0$ il polinomio è sempre >0;
- se $\Delta>0$ il polinomio ha 2 radici reali $\alpha<\beta$ ed è negativo per valori interni all'intervallo (α,β) ed è positivo per valori esterni
- se $\Delta=0$ il polinomio ha un'unica radice reale $x=\alpha$ ed è positivo per tutti i valori $x\neq\alpha$

—o—o—

Interpretazione grafica $\quad y=ax^2+bx+c$ nel piano cartesiano rappresenta una parabola

$a>0 \rightsquigarrow$ parabola $\cup$, $a<0 \rightsquigarrow$ parabola $\cap$



$\Delta<0$: nessuna intersezione con asse x. Quindi "y è sempre >0" Quindi il pol. di II grado assume solo valori positivi

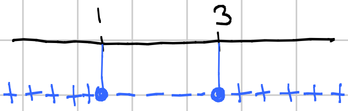
$\Delta=0$: una sola radice $x=\alpha$
- per $x=\alpha$ il pol. si annulla
- per $x\neq\alpha$ il pol. è >0

corretto a posteriori

$\Delta>0$: 2 radici $x=\alpha$ e $x=\beta$
- per $x\in(\alpha,\beta)$ "VALORI INTERNI" il pol. è <0
- per VALORI ESTERNI è >0

$\boxed{1}$ $x^2-4x+3 \geq 0$ Radici $(S=4,\ P=3)$ $x = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$

$\geq 0 \rightsquigarrow$ "VALORI ESTERNI" $x \leq 1$ oppure $x \geq 3$



Questo disegno rappresenta il segno di x^2-4x+3

$\boxed{2}$ $x^2-4x+3 \leq 0$ $1 \leq x \leq 3$ $[1,3]$

$\boxed{3}$ $x^2-4x+3 > 0$ $x < 1$ oppure $x > 3$, che si scrive anche

$(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$\boxed{4}$ $x^2 \leq 4$ $\rightsquigarrow$ $x \leq \pm 2$ ASSURDITÀ PURA !!!!

$x^2-4 \leq 0$ Radici : $x = \pm 2$

VALORI INTERNI $-2 \leq x \leq 2$ $[-2,2]$

$\boxed{5}$ $x^2 \geq 3x$ $x^{\cancel{2}} \geq 3\cancel{x}$ $x \geq 3$ NO!!!!!

$x^2-3x \geq 0$ Diseq. 2° grado : radici

VALORI ESTERNI

$x^2-3x=0$ $x(x-3)=0$

2 radici : $x=0$ e $x=3$

$(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

$\boxed{6}$ $x^2+4 \geq 0$ $x^2+4 \leq 0$

Disequazioni di 2° grado. Radici $x^2+4=0$ NESSUNA

Siamo nel caso $\Delta < 0$

$x^2+4 \geq 0$ sempre $\mathbb{R}$

$x^2+4 \leq 0$ MAI $\emptyset$

DISEQUAZIONI CON PRODOTTI E QUOZIENTI

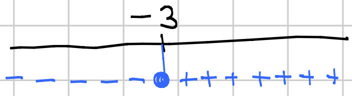
Titolo nota 17/09/2008

$\boxed{1}$ $(x-1)(x+3) \quad 0$

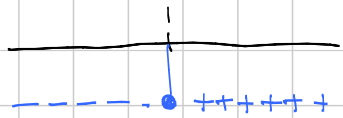
Voglio determinare il segno di $(x-1)(x+3)$

Studio separatamente i 2 FATTORI

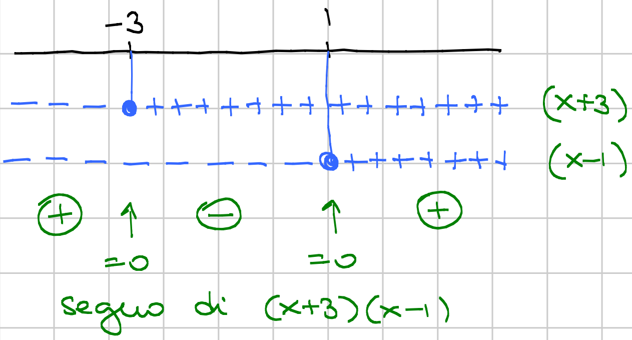
$$\mathrm{I}\begin{cases} x+3>0 & \text{per } x>-3 \\ x+3=0 & \text{per } x=-3 \\ x+3<0 & \text{per } x<-3 \end{cases}$$



$$\mathrm{II}\begin{cases} x-1>0 & \text{per } x>1 \\ x-1=0 & \text{per } x=1 \\ x-1<0 & \text{per } x<1 \end{cases}$$



Metto insieme i 2 studi



Ora posso considerare il verso della disequazione data

$(x-1)(x+3)>0 \qquad (-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

$(x-1)(x+3)\geq 0 \qquad (-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

$(x-1)(x+3)\leq 0 \qquad [-3,1]$

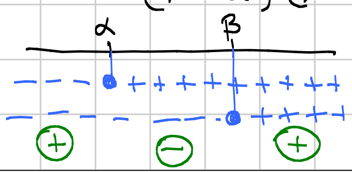
$(x-1)(x+3)<0 \qquad (-3,1)$

Nota bene: $(x-1)(x+3)>0$ è in particolare una diseq. di 2° grado: $x^2+3x-x-3>0$, $x^2+2x-3>0$

Radici: $x=-3$, $x=1$ VALORI ESTERNI

In generale se la diseq. di 2° grado è

$(x-\alpha)(x-\beta) \;\square\; 0$ con $\alpha<\beta$



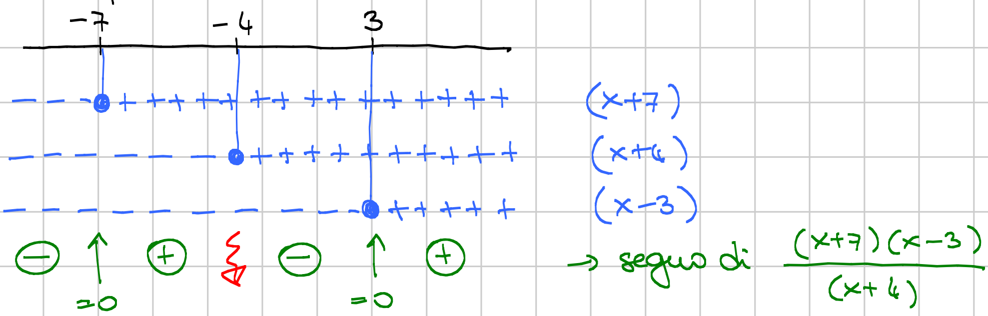
Esempio 2 $\quad \dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4} \ \square\ 0$

Considero separatamente i fattori $x+7$, $x-3$, $x+4$

$x+7>0$ per $x>-7$

$x+7=0$ per $x=-7$ $\quad$ analogamente per gli altri

$x+7<0$ per $x<-7$



$\boxed{\text{Ora}}$ posso guardare i versi nella diseq. di partenza

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}<0 \qquad (-\infty,-7)\cup(-4,3)$

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}\le 0 \qquad (-\infty,-7]\cup(-4,3]$ ESCLUSO

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}>0 \qquad (-7,-4)\cup(3,+\infty)$

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}\ge 0 \qquad [-7,-4)\cup[3,+\infty)$ ESCLUSO

— o — o —

Esempio 3 $\quad \dfrac{1}{x}>4$ $\quad \boxed{1>4x,\ 4x<1,\ x<\frac{1}{4}}$ NO! NO!

Non si può moltiplicare per x, perché non se ne conosce il segno

Porto tutto a sx

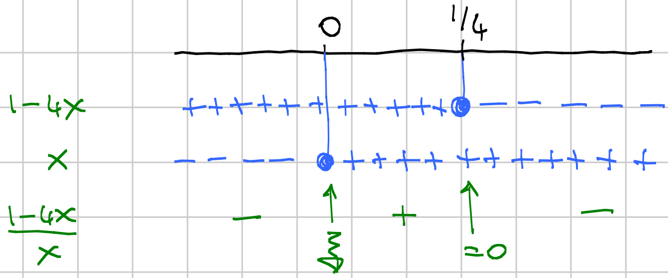
$\dfrac{1}{x}-4>0$

$\dfrac{1-4x}{x}>0$ $\quad$ Diseq. con quoziente. Studio separatamente i 2 termini

$1-4x>0$ se $4x<1$, cioè $x<\frac{1}{4}$

$1-4x=0$ se $4x=1$, " $x=\frac{1}{4}$

$1-4x<0$ " $4x>1$ " $x>\frac{1}{4}$



Ora guardo il verso nella diseq. iniziale

$\frac{1-4x}{x} > 0$ $\quad (0, \frac{1}{4}) \quad 0 < x < \frac{1}{4}$

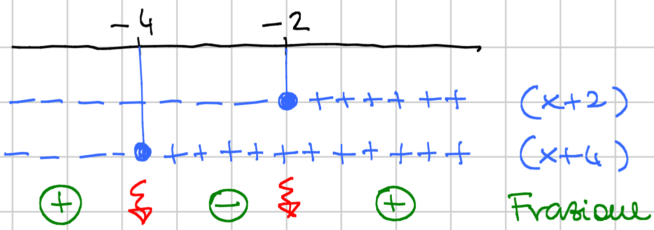
Esempio 4 $\quad \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$

Non pensare nemmeno di moltiplicare "in croce"!!!

Tutto a sx: $\quad \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0, \quad \frac{(x+1)(x+4)-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+4)} > 0$

$\frac{\cancel{x^2}+\cancel{4x}+\cancel{x}+4-\cancel{x^2}-\cancel{3x}-\cancel{2x}-6}{(x+2)(x+4)} > 0 \quad \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0$

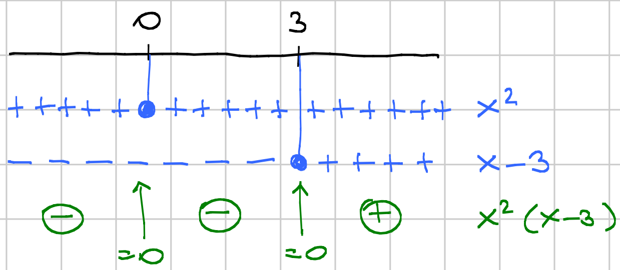
$\frac{2}{(x+2)(x+4)} < 0$



Frazione < 0 per $\quad -4 < x < -2 \quad (-4, -2)$

Se fosse stato: Frazione ≤ 0, la risposta era la stessa

Esempio 5 $\quad x^2(x-3) \geq 0$. Studio separatamente x^2 e $x-3$



$x^2(x-3) > 0 \quad (3, +\infty)$

$x^2(x-3) < 0$

$(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

NON COMPRENDE $x = 0$

$x^2(x-3) \leq 0 \quad (-\infty, 3]$

$x^2(x-3) \geq 0 \quad \{0\} \cup [3, +\infty)$

0 isolato

Esempio 6 $x^4-3x^2+4 \;\square\; 0$

Idea: fattorizzare, quindi risolvere come prodotto

$t=x^2$ $\quad t^2-3t+4$ $\quad$ Radici $\quad t_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}$

Non ci sono radici in t, quindi in particolare non ci sono radici in x. Inoltre l'espressione in t è sempre >0, quindi anche in x è sempre >0.

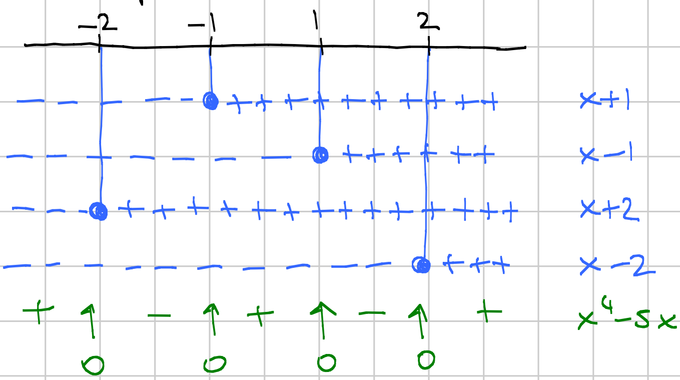
$x^4-3x^2+4>0$ $\quad$ sempre $\quad \mathbb{R}$

Esempio 7 $x^4-5x^2+4 \;\square\; 0$ $\quad t=x^2 \quad t^2-5t+4$

$(S=5,\ P=4)$ $\quad$ Radici: $t=1,\ t=4 \rightarrow$ Fattorizzazione:

$$t^2-5t+4 = (t-1)(t-4)$$
$$x^4-5x^2+4 = (x^2-1)(x^2-4)$$
$$= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

Studio separatamente i 4 termini:



$x^4-5x^2+4\le 0$ $\quad [-2,-1]\cup[1,2]$

$x^4-5x^2+4\ge 0$ $\quad (-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$

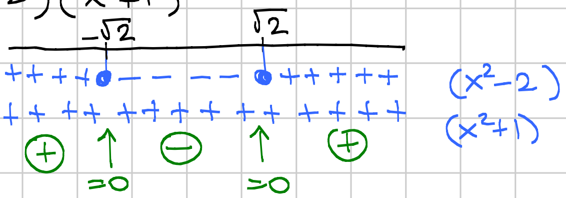
Esempio 8 x^4-x^2-2 $\quad t=x^2 \quad t^2-t-2$ $\quad (S=1,\ P=-2)$

Radici: $t=2,\ t=-1$ $\quad$ Fattorizzazione

$$t^2-t-2 = (t-2)(t+1)$$
$$x^4-x^2-2 = (x^2-2)(x^2+1)$$

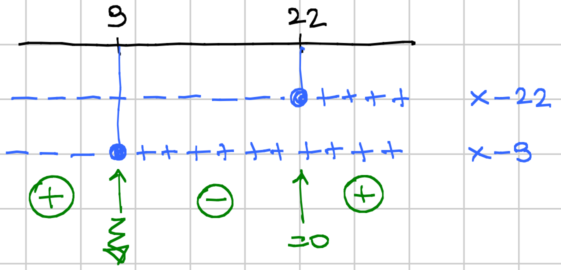
$x^4-x^2-2<0$

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$



Esempio 9 $\quad \dfrac{x+4}{x-9} \leqslant 2 \quad$ Tutto a sx $\quad \dfrac{x+4}{x-9} - 2 \leqslant 0$

$$\frac{x+4-2x+18}{x-9} \leqslant 0 \qquad \frac{-x+22}{x-9} \leqslant 0 \qquad \frac{x-22}{x-9} \geqslant 0$$



Quindi $\dfrac{x-22}{x-9} \geqslant 0$ per

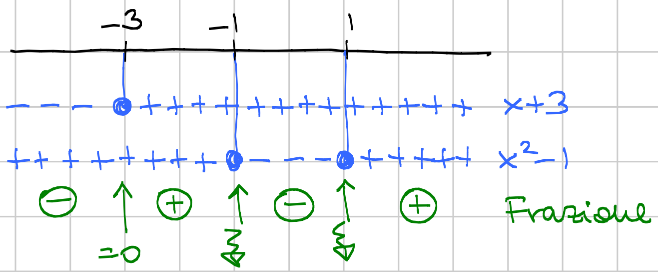
$(-\infty,-9) \cup [22,+\infty)$

Esempio 10 $\begin{cases} x^2 \leqslant 4 & (1) \\ \dfrac{x+3}{x^2-1} \leqslant 0 & (2) \end{cases}$ $\quad x^2-4 \leqslant 0 \quad [-2,2]$

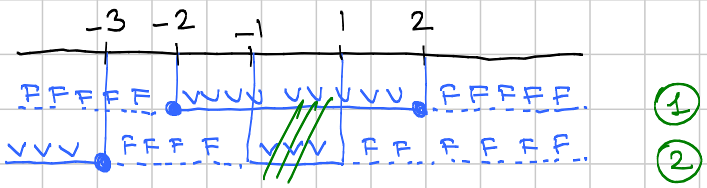
Risolvo disequazione (2)

Soluzione diseq. (2):

$(-\infty,-3] \cup (-1,1)$



Metto insieme le soluzioni della (1) e della (2)



Soluzione sistema: ZONA COMUNE, cioè $(-1,1)$.

ESPONENZIALI E LOGARITMI

Titolo nota 18/09/2008

$a^b = c$ Se conosco b e c, come trovo a?
Elevo tutto alla $\frac{1}{b}$

$$(a^b)^{\frac{1}{b}} = (c)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow a = c^{\frac{1}{b}}$$

Se conosco a e c, come trovo b? Con il logaritmo.

Per definizione: $\boxed{b = \log_a c}$ Potenza alla quale elevare il numero a per ottenere il numero c

<u>Osservazioni</u>

1. Serve $c > 0$ e $a > 0$ e $a \neq 1$
2. Date le condizioni di cui al punto precedente su a e c, esiste sempre un <u>unico</u> numero b tale che $a^b = c$

<u>Esempi</u> $2^x = 8$ $x = \log_2 8 = 3$

$10^x = 100$ $x = \log_{10} 100 = 2$ $\log_{10} c = \operatorname{Log} c$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$ sto pensando a $3^x = \frac{1}{3}$

$\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ sto pensando a $4^x = \frac{1}{2}$

$$4^{-\frac{1}{2}} = (4^{-1})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ $2^x = \frac{1}{4}$ $x = -2$

$\log_{1/2} 4 = -2$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$; $\frac{1}{2^x} = 4$; $2^x = \frac{1}{4}$

Proprietà del logaritmo

[1] $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

[2] $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

[3] $\log_a x^y = y \log_a x$

[5] $\log_a(x \pm y)$ Nulla di furbo

[6] $\log_a x \cdot \log_a y$ Nulla di furbo

[4] Formula di cambio di base: permette di calcolare un log in base a sapendo fare solo log in base b

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Come si ricava il cambio di base:

1. voglio calcolare $\boxed{z = \log_a x}$, cioè risolvere $a^z = x$;
2. so fare solo: log in base b;
3. prendo $\log_b$ a dx e sx: ottengo $\log_b a^z = \log_b x$
4. Applico la proprietà [3] dei log: $z \log_b a = \log_b x$
5. Ricavo $\boxed{z = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$

— o — o —

Giustificazione formula 1: $\underbrace{\log_a(x \cdot y)}_{= k} = \underbrace{\log_a x}_{= m} + \underbrace{\log_a y}_{= n}$

$\log_a x = m \iff a^m = x$

$\log_a y = n \iff a^n = y$ moltiplicando ottengo

$$a^m \cdot a^n = x \cdot y$$

$$a^{m+n} = x \cdot y \iff m+n = \log_a(x \cdot y)$$

Esercizi

1. $\log_2 16 = 4 \qquad 2^x = 16$;

2. $\log_2 a = 3 \qquad a = 8$

$\log_2 a = 3$; $\log_2 a = 3 \boxed{\log_2 2}$ $\qquad$ In generale: $\log_a a = 1$

$\log_2 2 = 1$

$\log_2 a = 3 \log_2 2 = \log_2 2^3$; $\cancel{\log_2} a = \cancel{\log_2} 2^3$, $a = 2^3$

— o — o —

3. $\log_3 2^4 = a \log_3 2 \qquad a = 4$

4. $\log_3 \sqrt{2} = a \log_3 2$; $\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 2$

5. $\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64 = 3 + 4 + 6 = 13$

oppure:

$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 (2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6) = \log_2 2^{3+4+6}$

propr. potenze

$= \log_2 2^{13} = 13 \overbrace{\log_2 2}^{1} = 13$

6. $\log_3 20 + \log_3 4 = \log_3 (20 \cdot 4) = \log_3 80$

7. $\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 \frac{20}{4} = \log_3 5$

8. $\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 \frac{3}{2}$

9. $\log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 a$

$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6 = \log_2 a$, ma $6 = \log_2 2^6$
$= \log_2 64$

10. $\log_2 2^a = 9$; $\log_2 2^a = 9 \log_2 2$

$\log_2 2^a = \log_2 2^9 \implies a = 9$

11. $\log_2 4^a = 9$; $\log_2 2^{2a} = 9$; $\log_2 2^{2a} = 9 \log_2 2$
$= \log_2 2^9$

$\log_2 2^{2a} = \log_2 2^3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = 3/2$

Modo alternativo per esercizi $\boxed{10}$ e $\boxed{11}$

$\boxed{10'}$ $\log_2 2^a = 3 \Rightarrow a \underbrace{\log_2 2}_{=1} = 3 \Rightarrow a = 3$

$\boxed{11'}$ $\log_2 4^a = 3 \Rightarrow a \underbrace{\log_2 4}_{=2} = 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = 3/2$

$\boxed{12}$ $2^{\log_2 a} = 3$ Faccio a dx e sx il $\log_2$

$$\log_2 \left(2^{\boxed{\log_2 a}}\right) = \log_2 3$$

$$\log_2 a \cdot \underbrace{\log_2 2}_{=1} = \log_2 3 \Rightarrow \log_2 a = \log_2 3 \Rightarrow a = 3$$

$\boxed{13}$ $\log_a 4 = 2$ L'incognita alla base è fastidiosa
Con la formula di cambio di base posso passare in base 2

$$\log_a 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 a} = \frac{2}{\log_2 a}$$ L'equazione diventa

$$\log_a 4 = 2 \rightsquigarrow \frac{2}{\log_2 a} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \log_2 a$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 1 \Rightarrow a = 2$$

—o—o—

$\boxed{14}$ $\log_3 9 = \log_2 a \; ; \; 2 = \log_2 a \Rightarrow a = 4$

$\boxed{15}$ $\log_3 9 = \log_a 25 \; ; \; 2 = \log_a 25 \Rightarrow a = 5$

$$\log_a 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 a} = \frac{2}{\log_5 a}$$ e da qui come esercizio precedente

$\boxed{16}$ $\log_3 \sqrt{2} = a \log_3 4 \; ; \; \log_3 2^{\frac{1}{2}} = a \log_3 2^2$

$$\frac{1}{2} \cancel{\log_3} 2 = 2a \cancel{\log_3} 2 \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

17 $\log_5 3^{1000} = \log_{25} a^{1000}$

$\log_5 3^{1000} = 1000 \log_5 3$

$\log_{25} a^{1000} = 1000 \log_{25} a = 1000 \dfrac{\log_5 a}{\boxed{\log_5 25}} = 500 \log_5 a$

$\log_5 25 = 2$

L'equazione è diventata:

$\cancel{1000}^{\,2} \log_5 3 = \cancel{500} \log_5 a \; ; \; 2 \log_5 3 = \log_5 a$

$\log_5 3^2 = \log_5 a \Rightarrow a = 9$

18 $\log_{125} 64 = \log_5 a \; ; \; \log_{125} 64 = \dfrac{\log_5 64}{\log_5 125} = \dfrac{\log_5 64}{3}$

Quindi l'eq. diventa:

$\boxed{\log_5 a} = \frac{1}{3} \log_5 64 = \log_5 64^{1/3} = \log_5 \sqrt[3]{64} = \boxed{\log_5 4}$

$\Rightarrow a = 4$

— o — o —

19 $\log_7 2^{1000} = \log_{49} 2^a \; ; \; \log_7 2^{1000} = 1000 \cdot \log_7 2$

$\log_{49} 2^a = a \log_{49} 2 = a \dfrac{\log_7 2}{\log_7 49} = \dfrac{a}{2} \log_7 2$

Quindi l'eq. diventa: $1000 \cancel{\log_7} 2 = \dfrac{a}{2} \cancel{\log_7} 2 \Rightarrow a = 2000$

— o — o —

20 $\log_7 13 \cdot \log_5 7 = \log_5 a \; ; \; \log_7 13 = \dfrac{\log_5 13}{\log_5 7}$

$\dfrac{\log_5 13}{\cancel{\log_5 7}} \cdot \cancel{\log_5 7} = \log_5 a \Rightarrow a = 13$

— o — o —

21 $\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a$ in base 2

$\dfrac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \dfrac{\log_2 49}{\log_2 8} = \log_2 a$

$\log_2 49 = \log_2 7^2 = 2 \log_2 7$

$$\frac{\log_2 3}{\cancel{\log_2 7}} \cdot \frac{2\cancel{\log_2 7}}{3} = \log_2 a$$

$$\frac{2}{3}\log_2 3 = \log_2 a \quad ; \quad \log_2 3^{\frac{2}{3}} = \log_2 a$$

$$\Rightarrow a = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$$

— o —

22 $2^{\log_4 a} = 9$ $\boxed{\text{Se fosse } 2^{\log_4 a} = 8 = 2^3}$

Spezzare il problema in 2 problemi.
Pongo $x = \log_4 a$. L'equazione diventa $2^x = 9$,
quindi $x = \log_2 9$. Ora resta da risolvere

$$\boxed{\log_2 9} = \log_4 a = \frac{\log_2 a}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 a = \boxed{\log_2 \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a} = 9 \Rightarrow a = 81$$

— o — o —

23 $2^{\log_a 3} = 4$ Pongo $x = \log_a 3$

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Resta da risolvere $2 = \log_a 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 a}$

$$2 = \frac{1}{\log_3 a} \Rightarrow \log_3 a = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3 3$$

$$= \log_3 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3}$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON ESPONENZIALI E LOGARITMI

Titolo nota 18/09/2008

$\boxed{1}$ $2^x = 3$ $x = \log_2 3$

$\boxed{2}$ $(2^x)^2 = 3$ 1° modo: proprietà delle potenze

$(2^x)^2 = 2^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \log_2 3$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\log_2 3 = \log_2 \sqrt{3}$

2° modo: pongo $2^x = y \rightsquigarrow y^2 = 3 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3} \rightsquigarrow 2^x = \sqrt{3} \rightsquigarrow x = \log_2 \sqrt{3}$

$y = -\sqrt{3} \rightsquigarrow 2^x = -\sqrt{3} \rightsquigarrow$ NULLA perché una potenza di 2 non è mai ≤ 0.

$\boxed{3}$ $2^{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = \log_2 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_2 3}$ SI !!!

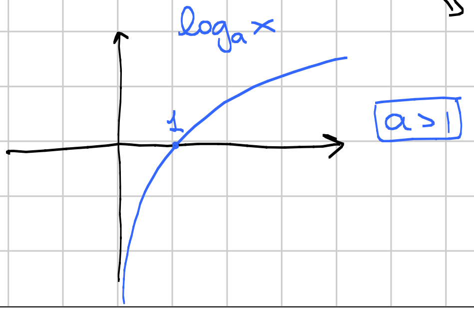
$\boxed{4}$ $3^{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = \log_3 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_3 2}$ SI !!

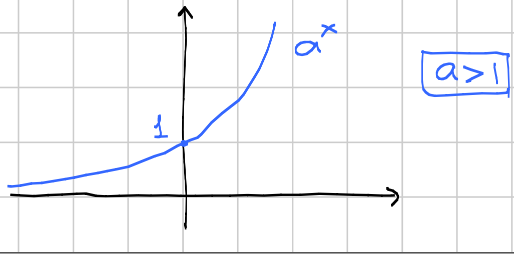
Occhio: $\log_2 3$ e $\log_3 2$ sono quantità > 0, quindi la radice ha senso

— o — o —

<u>Segno di potenze e logaritmi</u> 2^x, 3^x o in generale a^x con base $a > 0$ sono sempre quantità > 0.

$\log_a x$ con $a > 1$
- > 0 per $x > 1$
- $= 0$ per $x = 1$
- < 0 per $0 < x < 1$
- NON DEFINITO PER $x \leq 0$





5 $4\cdot 2^{x^2} = 8^x$ scrivo tutto come potenze di 2:

$2^2\cdot 2^{x^2} = (2^3)^x$; $2^{2+x^2} = 2^{3x}$ (proprietà delle potenze)

Osservazione generale: se ho

$$\boxed{2^{A(x)} = 2^{B(x)} \iff A(x) = B(x)}$$ SI PUÒ FARE

$2^{2+x^2} = 2^{3x} \iff 2+x^2 = 3x \iff x^2-3x+2=0$

$P=2,\ S=3 \Rightarrow$ soluzioni $x=1$ e $x=2$

6 $3\cdot 2^{x^2} = 1$; $2^{x^2} = \frac{1}{3}$; $x^2 = \log_2\frac{1}{3}$

$x = \pm\sqrt{\log_2\frac{1}{3}}$ NO!!!! $\log_2\frac{1}{3} < 0$, quindi l'eq. è $x^2 =$ roba negativa $\Rightarrow$ NESSUNA SOLUZIONE

7 $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$, $2^{2x} - 2^{x+2} + 3 = 0$

$2^{2x} = [2^x]^2$; $2^{x+2} = 2^x\cdot 2^2 = 4\cdot 2^x$

Pongo $2^x = y$. L'equazione era $[2^x]^2 - 4\cdot 2^x + 3 = 0$

e diventa quindi $y^2 - 4y + 3 = 0$. Risolvo in y: $y = \begin{cases}1\\3\end{cases}$

$y=1 \rightsquigarrow 2^x = 1 \rightsquigarrow x = 0$

$y=3 \rightsquigarrow 2^x = 3 \rightsquigarrow x = \log_2 3$

8 $2^x = 3^x$ 1° modo: divido per 3^x: $\frac{2^x}{3^x} = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \iff x = 0$

2° modo: faccio a dx e sx il log in base 7: $\log_7 2^x = \log_7 3^x$

$x\log_7 2 = x\log_7 3$, $\underbrace{(\log_7 2 - \log_7 3)}_{\neq 0}\, x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\boxed{9}$ $\log_2(x-1) = 5$

In generale conviene portarsi nella forma

$$\boxed{\log_a A(x) = \log_a B(x) \iff A(x) = B(x)}$$

Si può FARE, ma bisogna imporre $A(x)>0$ (o $B(x)>0$)
(cioè bisogna fare la verifica alla fine)

$\log_2(x-1) = 5\log_2 2$; $\cancel{\log_2}(x-1) = \cancel{\log_2} 2^5$

$x-1 = 2^5 = 32 \Rightarrow x = 33$ (non c'è da imporre nulla perché $2^5>0$)

$\boxed{10}$ $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 = 3\log_2 2 = \log_2 8$

$\cancel{\log_2}[(x-1)(x+1)] = \cancel{\log_2} 8$ ($8>0 \Rightarrow$ nulla da imporre)

$(x-1)(x+1) = 8$, $x^2-1=8$, $x^2=9$, $x = \pm 3$
Sostituendo $x=-3$ nell'eq. iniziale si vede che non va bene; $x=3$ invece sì.

$\boxed{11}$ $3\log_3 x + 2\log_3 x^2 = 21$; $3\log_3 x + 4\log_3 x = 21$
$7\log_3 x = 21 \iff \log_3 x = 3 = 3\log_3 3 = \log_3 27$
$\iff x = 27$

— o — o —

$\boxed{12}$ $(\log_2(x+2))^2 + 3\log_2(x+2) = 4$. Pongo $y = \log_2(x+2)$

L'equazione diventa: $y^2+3y = 4 \iff y^2+3y-4=0$

$P=-4$, $S=-3 \Rightarrow$ soluzioni $y=-4$, $y=1$. Torno in x

$y=1 \rightsquigarrow \log_2(x+2) = 1 = \log_2 2 \Rightarrow x+2 = 2 \Rightarrow x=0$
$y=-4 \rightsquigarrow \log_2(x+2) = -4 = -4\log_2 2 = \log_2 \frac{1}{16} \Rightarrow x+2 = \frac{1}{16}$ ...

DISEQUAZIONI Teoria generale

$$2^{A(x)} > 2^{B(x)} \iff A(x) > B(x)$$

SI PUÒ FARE PER TUTTE LE BASI >1 (la base deve essere la stessa a dx e sx)

base $a>1$

$$\log_a A(x) > \log_a B(x) \iff A(x) > B(x) \boxed{>0}$$

SI PUÒ FARE CON TUTTE LE BASI $a>1$, ma bisogna imporre $B(x)>0$ affinché il log abbia senso.

$\boxed{1}$ $3^{x^2} < 9$; $\cancel{3}^{x^2} < \cancel{3}^2$; $x^2 < 2$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$\boxed{2}$ $3^{x+3} > 3$; $3^{x+3} > 3^1$; $x+3>1$, $x>-2$ $(-2,+\infty)$

$\boxed{3}$ $\log_3(x+3) > 0$

$\log_3(x+3) > \log_3 1 \iff x+3>1 \boxed{>0}$ Banale

$x+3>1$, quindi $x>-2$ $(-2,+\infty)$

④ $\log_2(2x-4) \le 3\log_2 2$; $\log_2(2x-4) \le \log_2 8$

$\iff 0 < 2x-4 \le 8$

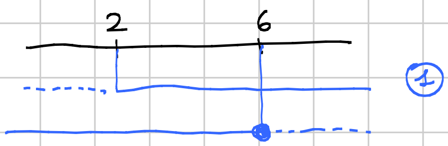
condizione di esistenza del log. perché c'era nell'equazione

Le 2 disequazioni $2x-4>0$ ① $2x-4 \le 8$ ② devono essere vere contemporaneamente

$\Rightarrow$ si tratta di un SISTEMA

① $2x>4 \iff x>2$

② $2x-4\le 8 \iff 2x \le 12 \iff x \le 6$



ZONA COMUNE: $2<x\le 6$ $(2,6]$

$\boxed{5}$ $2^{x+3} \le 4^x \iff 2^{x+3} \le 2^{2x} \iff x+3 \le 2x$

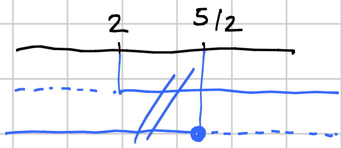
$\iff x \ge 3$

$\boxed{6}$ $\log_2 (2x-4) \le 0$; $\log_2 (2x-4) \le \log_2 1$

$\iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cond.} \\ \text{esistenza}}}{0 <} 2x-4 \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{ottenuto togliendo} \\ \text{i log}}}{\le 1}$ $\qquad \begin{cases} 2x-4>0 & (1) \\ 2x-4 \le 1 & (2) \end{cases}$

(1) $2x > 4$, $x > 2$

(2) $2x-4 \le 1$, $2x \le 5$, $x \le \frac{5}{2}$



zona comune: $(2, 5/2]$ $\qquad 2 < x \le \frac{5}{2}$

— o — o —

$\boxed{7}$ $\log_2 (2x+3) < 2$; $\log_2 (2x+3) < \log_2 4$

$0 < 2x+3 < 4$ $\qquad \begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3<4 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x>-3 \\ 2x<1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-3/2 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$

Soluzione: $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ $\qquad \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

— o — o —

$\boxed{8}$ $2^{x^2+1} = 8$ $\qquad 2^{x^2+1} = 2^3$

$x^2+1 = 3$ $\qquad x^2 = 2$ $\qquad x = \pm\sqrt{2}$

$\boxed{8'}$ $2^{x^2+1} > 8$ $\qquad 2^{x^2+1} > 2^3$ $\qquad x^2+1 > 3$

$x^2 > 2 \iff (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON RADICI

Titolo nota 19/09/2008

↗ Radici di indice dispari $\sqrt[3]{\ }, \sqrt[5]{\ }, \ldots$

↘ Radici di indice pari $\sqrt{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ }, \ldots$

INDICE DISPARI

$$\boxed{\sqrt[3]{A(x)} = B(x) \iff A(x) = [B(x)]^3} \quad \text{SI}$$

Idea: 2 numeri sono uguali $\iff$ i loro cubi sono uguali

$$\boxed{\sqrt[3]{A(x)} > B(x) \iff A(x) > [B(x)]^3} \quad \text{SI}$$

Idea: il cubo di un numero A è più grande del cubo di un numero B $\iff$ A è più grande di B

Detto altrimenti: il cubo conserva l'ordine

Esempio 1 $\sqrt[3]{x+3} = 2 \iff x+3 = 2^3 \iff x+3 = 8$
$\iff x = 5$

Esempio 2 $\sqrt[3]{x^3-8} = x+1 \iff x^3-8 = (x+1)^3 \iff$
$\iff \cancel{x^3}-8 = \cancel{x^3}+3x^2+3x+1 \iff 3x^2+3x+9 = 0$
$\iff x^2+x+3 = 0 \qquad \Delta < 0 \Rightarrow$ nessuna soluzione

Esempio 3 $\sqrt[5]{x^2-7} > 2$ Posso fare le 5ª potenze

$x^2-7 > 2^5 \iff x^2-7 > 32 \iff x^2 > 39$

Valori esterni: $(-\infty, -\sqrt{39}) \cup (\sqrt{39}, +\infty)$

Esempio 4 $\sqrt[3]{x} \leq x \iff x \leq x^3 \iff x^3 - x \geq 0 \iff x(x^2-1) \geq 0$

$x(x+1)(x-1) \geq 0 \rightsquigarrow$ Diseq. con prodotti

RADICI DI INDICE PARI

$$\boxed{\sqrt{A(x)} = B(x) \iff A(x) = [B(x)]^2}$$ Non si può fare

Esempio $\sqrt{x} = -2$ questa non ha soluzioni. Se faccio il quadrato ottengo $x = 4$ soluzione FINTA!!
Se sostituisco nell'eq. originaria ottengo $2 = -2$
fare il quadrato distrugge la diff. di segno!

In pratica: fare il quadrato si può, ma occorre poi verificare le soluzioni ottenute.

Esempio 1 $\sqrt{x+1} = 9$ elevo al quadrato: $x+1 = 81$
$\boxed{x = 80}$. Sostituisco $\sqrt{81} = 9$ ok!

Esempio 2 $\sqrt{x+1} = -9$. Elevo al quadrato $x+1 = 81$
$\cancel{\boxed{x = 80}}$. Sostituisco $\sqrt{81} = -9$ NO!
NO

Esempio 3 $\sqrt[4]{x-8} = 3$. Elevo alla quarta: $x-8 = 3^4 = 81$
$\boxed{x = 89}$ Sostituisco: $\sqrt[4]{81} = 3$ ok!

Esempio 4 $\sqrt{x+14} = x+2$. Elevo al quadrato:
$x+14 = (x+2)^2$
$x+14 = x^2+4x+4$, $x^2+3x-10 = 0$
$S = -3$, $P = -10$ Soluzioni: $x = -5$, $x = 2$
Sostituisco $x = -5$: $\sqrt{9} = -3$ NON ACCETTABILE
Sostituisco $x = 2$: $\sqrt{16} = 4$ Ok!
$\Rightarrow$ L'eq. ha una sola soluzione $\boxed{x = 2}$

Nota bene: la soluzione accettabile è quella che rende ≥ 0 il termine a destra.

Esempio 5 $\sqrt{x+6} = -x$ Elevo al quadrato:

$x+6 = x^2 \iff x^2 - x - 6 = 0$

$S = 1,\ P = -6$: Soluzioni : $x = 3$, $x = -2$

Verifico $x = 3$: $\sqrt{9} = -3$ NON ACCETTABILE

" $x = -2$: $\sqrt{4} = +2$ Ok

Unica soluzione : $\boxed{x = -2}$

— o — o —

DISEQUAZIONI CON RADICI (di indice pari)

Bisogna distinguere 2 casi

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Primo caso : $\sqrt{A(x)} < B(x)$

$$\begin{cases} A(x) < [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$$

Il problema è che il quadrato conserva l'ordinamento tra numeri positivi e lo inverte tra numeri negativi

Se $A(x)$ è <0, la radice non ha nemmeno senso

Riassumendo:

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x) \iff \begin{cases} A(x) \leq [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$$

fare i quadrati

se $B(x) < 0$ non è ver

esistenza della $\sqrt{\ }$

In questo modo una disequazione si trasforma in un sistema di 3 disequazioni.

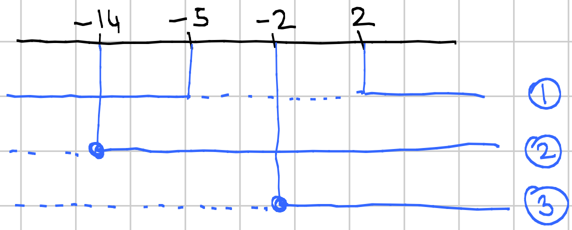
Esempio 1 $\sqrt{x+14} < x+2$ si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} x+14 < (x+2)^2 \\ x+14 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Fare i quadrati
Esistenza radice (BUROCRAZIA)
Positività del termine a dx (se fosse <0 la diseq. di sicuro non è verificata)

$$\begin{cases} x+14 < x^2+4x+4 \\ x \geq -14 \\ x \geq -2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2+3x-10 > 0 \\ x \geq -14 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

VALORI ESTERNI a $-5, 2$



Soluz. sistema =
zona comune = $(2, +\infty)$
= soluz. diseq. originaria

— o — o —

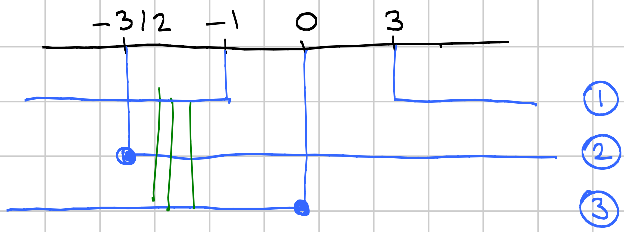
Esempio 2 $\quad \sqrt{2x+3} + x < 0 \iff \sqrt{2x+3} < -x$

questa è equiv. al sistema

$$\begin{cases} 2x+3 < x^2 \\ 2x+3 \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases}$$

Fare il quadrato
BUROCRAZIA (esistenza radice)
Positività del termine a dx (altrimenti NO SOL.)

$$\begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ 2x \geq -3 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Valori esterni a } -1, 3 \\ x \geq -3/2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



Soluz. diseq. iniziale =
soluz. sistema =
zona comune =
$[-3/2, -1)$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\sqrt{A(x)} > B(x)$

La condizione $A(x) \geq 0$ va comunque imposta.
Se $B(x) < 0$, sicuramente la disuguaglianza è verificata (purché la radice abbia senso).

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Le soluz. di questo sistema sono automaticamente soluz. della diseq. originaria.
Non sono in generale tutte le soluzioni.

Se $A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$ posso fare i quadrati e trovare altre soluzioni.

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono soluz. della diseq. originaria

← questa implica la 1ª diseq., cioè $A(x) \geq 0$

In conclusione la disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente all'UNIONE di 2 sistemi

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Operativamente:
- risolvo il 1° sistema (separatamente)
- risolvo il 2° sistema (separatamente)
- "attacco" le soluz. del 1° e del 2° (sono tutte buone)

<u>Esempio 1</u> $\sqrt{x} > x+2$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x \geq 0} \\ x+2 \geq 0 \\ x > (x+2)^2 \end{cases}$$

si può trascurare

Risolvo il 1° sistema: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$ SOL: $\emptyset$

Risolvo il 2° sistema: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > x^2+4x+4 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+3x+4 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ \Delta = 9-16 < 0 \end{cases}$: soluz. $\emptyset$

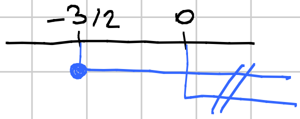
Quindi non ci sono soluz. nemmeno al 2° sistema.

<u>Esempio 2</u> $\sqrt{2x+3} > -x$

$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ -x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{2x+3 \geq 0} \text{ segue dalla } 3^a \\ -x \geq 0 \\ (2x+3) > x^2 \end{cases}$

Risolvo il 1° sistema:

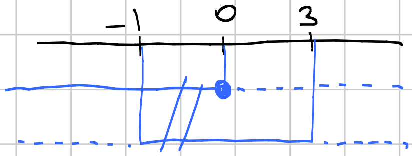
$\begin{cases} 2x \geq -3 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3/2 \\ x > 0 \end{cases}$



Soluz. 1° sistema: $(0, +\infty)$

Risolvo il 2° sistema:

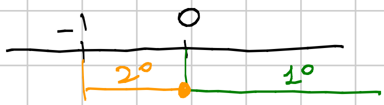
$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x+3 > x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases}$ VAL. INTERNI $(-1, 3)$



Soluz. 2° sistema: $(-1, 0]$

1° sistema: $(0, +\infty)$

2° sistema: $(-1, 0]$



UNENDO le 2 soluzioni ottengo la soluz. della diseq. originaria, cioè

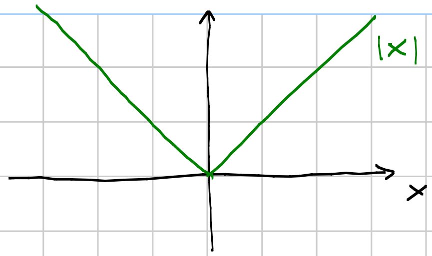
$(-1, +\infty)$

VALORI ASSOLUTI E RELATIVE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Titolo nota 19/09/2008

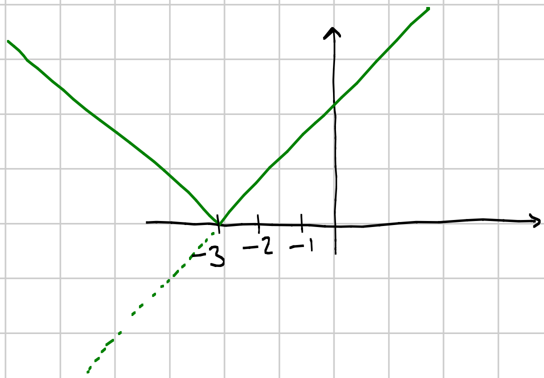
VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Occhio:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0, \text{ cioè se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x+3 < 0, \text{ cioè se } x < -3 \end{cases}$$



Equazioni e disequazioni con valori assoluti:

togliere i valori assoluti distinguendo i 2 casi.

Esempio 1 $|x+1| = 3x-4$ Distinguo i casi a seconda del segno di $x+1$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 = 3x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = 3x-4 \end{cases}$$

Tra le soluz. dei 2 sistemi si fa poi l'unione

Risolvere questo sistema vuol dire risolvere l'eq. e prendere solo le soluzioni che verificano la diseq.

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x = 5 \end{cases} \qquad x = 5/2$$

compatibile con la diseq., quindi accettabile

$$\begin{cases} x+1<0 \\ -x-1=3x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-1 \\ 4x=3 \end{cases} \qquad x=3/4$$ NON ACCETTABILE perché non soddisfa la diseq.

Conclusione: l'eq. ha come unica soluz. $x=5/2$.

Esempio 2 $\quad |x^2-4|=1$

$$\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-4=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4<0 \\ -x^2+4=1 \end{cases}$$ Risolvo separatamente e poi faccio l'unione

$$\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2=5 \end{cases} \rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$ compatibili con la diseq. $\Rightarrow$ accettabili

$$\begin{cases} x^2<4 \\ x^2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\in(-2,2) \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow$$ compatibili $\Rightarrow$ accettabili

L'equazione iniziale ha 4 soluzioni $x=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm\sqrt{5}$.

— o — o —

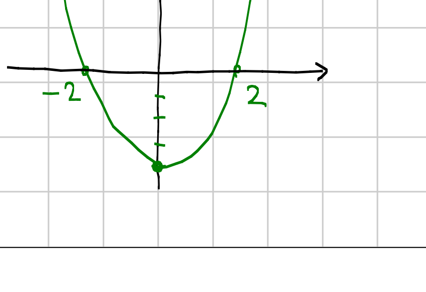
Esempio 3 $\quad |x^2-4|=9$

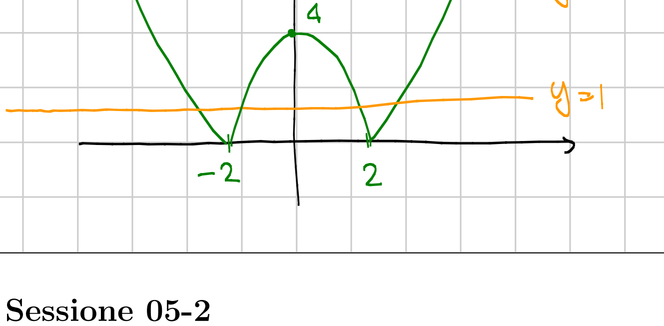
$$\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-4=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4<0 \\ -x^2+4=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\geq 4 \\ x^2=13 \end{cases} \rightarrow x=\pm\sqrt{13} \qquad \begin{cases} x^2<4 \\ x^2=-5 \end{cases} \rightarrow \text{NULLA}$$

accettabili

L'equazione ha 2 soluzioni $x=\pm\sqrt{13}$



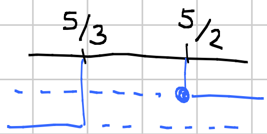


Esempio 4 $\quad |2x-5| + x < 0 \quad$ Distinguo 2 casi per eliminare il valore assoluto

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 2x-5+x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5<0 \\ -2x+5+x<0 \end{cases}$$

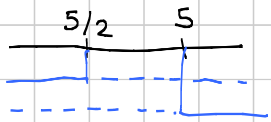
Risolvo separ. i 2 sistemi, poi faccio l'UNIONE

$$1^\circ \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 3x-5<0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x \geq 5 \\ 3x<5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq 5/2 \\ x < \frac{5}{3} \end{cases}$$



Nessuna zona comune $\Rightarrow$ NO SOLUZIONI

$$2^\circ \begin{cases} 2x-5<0 \\ -x+5<0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x<5/2 \\ x>5 \end{cases}$$



Nessuna zona comune $\Rightarrow$ NO SOL.

La diseq. iniziale non ha soluzioni

Esempio 5 $\quad |2x-3| > x+10$

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x-3 > x+10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3<0 \\ -2x+3>x+10 \end{cases}$$

$$1^\circ \begin{cases} 2x \geq 3 \\ x>13 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3/2 \\ x>13 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x>13}$$ Soluz. 1° sistema

$$2^\circ \begin{cases} 2x<3 \\ -3x>7 \end{cases} \quad \begin{cases} x<3/2 \\ x<-7/3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x<-7/3}$$ Soluz. 2° sistema

Soluz. diseq. iniziale = UNIONE soluz. dei 2 sistemi

$$= (-\infty, -7/3) \cup (13, +\infty)$$

Esempio 6 $\quad |x+1| + |2x+3| = 4x+8 \quad$ Distinguo 4 casi a seconda dei segni

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ x+1+2x+3 = 4x+8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3<0 \\ x+1-2x-3 = 4x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1<0 \\ 2x+3\geq 0 \\ -x-1+2x+3=4x+8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1<0 \\ 2x+3<0 \\ -x-1-2x-3=4x+8 \end{cases}$$

Risolvo i 4 sistemi

$$\begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -3/2 \\ x=-4 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE} \qquad \begin{cases} x\geq -1 \\ x<-3/2 \end{cases}$$

Già queste 2 sono incompatibili

$$\begin{cases} x<-1 \\ x\geq -3/2 \\ 3x=-6 \qquad x=-2 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE} \qquad \begin{cases} x<-1 \\ x<-3/2 \\ 7x=-12 \qquad x=-12/7 \end{cases}$$

$x=-12/7$ è <-1 e anche $<-3/2$, quindi è compatibile

Conclusione: l'equazione iniziale ha come unica soluzione $x=-12/7$.

— o — o —

Esempio 7 $\quad (x-2)\log_5 x>0 \quad$ Disequazione con prodotto

Studio separatamente i 2 fattori

$x-2>0$ per $x>2$

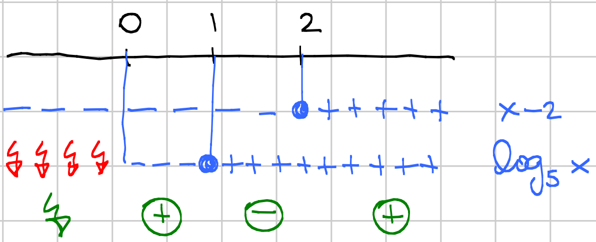
$x-2=0$ per $x=2$

$x-2<0$ per $x<2$

$\log_5 x>0$ per $x>1$

$\log_5 x=0$ per $x=1$

$\log_5 x<0$ per $0<x<1$



Soluz. diseq.: $(0,1)\cup(2,+\infty)$

Se fosse stato $(x-2)\log_5 x\leq 0$ la sol. sarebbe stata $[+1,2]$

Se fosse stato $(x-2)\log_5 x\geq 0$ la sol. era $(0,1]\cup[2,+\infty)$

Esempio 8 $\quad 4^x - 5\cdot 2^x + 4 \leq 0 \quad ; \quad [2^x]^2 - 5\cdot 2^x + 4 \leq 0$

Pongo $t = 2^x$: $\quad t^2 - 5t + 4 \leq 0 \quad$ radici: $t=1,\ t=4$

Soluzione in t $\quad 1 \leq t \leq 4$. Torno in x:

$1 \leq 2^x \leq 4$, cioè

$$\begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \leq 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2^x \geq 2^0 \\ 2^x \leq 2^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 2 \qquad [0,2]$$

Esempio 9 $\quad (3^{x+3} - 1)(x+3) \leq 0 \quad$ Diseq. con prodotto

$x+3 > 0 \quad$ per $\quad x > -3$

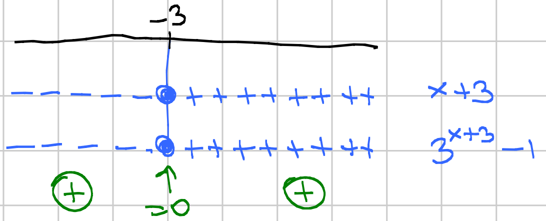
$x+3 = 0 \quad$ per $\quad x = -3$

$x+3 < 0 \quad$ per $\quad x < -3$

$3^{x+3} - 1 > 0 \iff 3^{x+3} > 1 \iff 3^{x+3} > 3^0 \iff x+3 > 0 \iff x > -3$

$3^{x+3} - 1 = 0 \iff \quad .. \quad \iff x = -3$

$3^{x+3} - 1 < 0 \iff \quad ... \quad \iff x < -3$



La soluz. della diseq. data è solo $x = -3$

CONSEGUENZA DELL'ALTRA

Esempio 10 $\quad \sqrt{x+3} > 4$

$\boxed{x+3 \geq 0}$ BUROCRAZIA

$x+3 > 16$ QUADRATI

Soluzione: $\quad x > 13 \qquad (13, +\infty)$

Esempio 11 $\quad \sqrt{x+3} > -4 \quad$ sempre verificata purché la radice abbia senso, quindi

$x+3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -3}$

Esempio 12 $\quad \sqrt{x+3} < 5$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 & \text{BUROCRAZIA} \\ x+3 < 25 & \text{QUADRATI} \end{cases}$$

$x \geq -3 \ , \ x < 22 \Rightarrow \quad [-3, 22)$

Esempio 13 $\sqrt{x} < |x-2|$ Distinguo 2 casi per eliminare il $|\cdot|$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x} < x-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 < 0 \\ \sqrt{x} < -x+2 \end{cases}$$

Risolvo separatamente e faccio l'unione

... così è lasciato per esercizio ...

Alternativa + rapida $x \geq 0$ BUROCRAZIA

$|x-2| \geq 0$ sempre (si annulla $\Leftrightarrow$ $x=2$)
Quindi (perché $x \geq 0$) posso fare i quadrati ottenendo

$$x < |x-2|^2 = (x-2)^2 = x^2-4x+4$$

In conclusione ho ottenuto il sistema

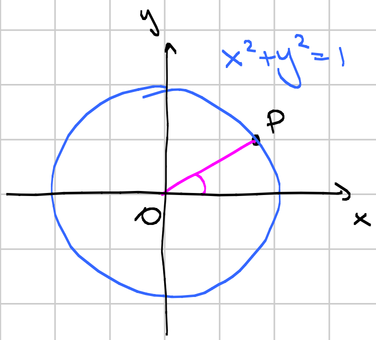
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < x^2-4x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-5x+4 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{valori est. a } 1, 4 \end{cases}$$

Sol. diseq. iniz. = soluz. sistema
= parte comune $= [0,1) \cup (4,+\infty)$

TRIGONOMETRIA

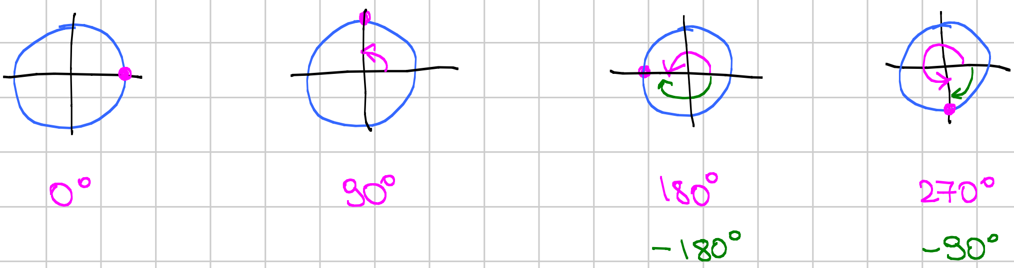
Titolo nota 22/09/2008

CIRCONFERENZA TRIGONOMETRICA = centro in (0,0) e raggio 1.



Come individuare un p.to P sulla circonferenza?

GRADI SESSAGESIMALI (misura dell'angolo)

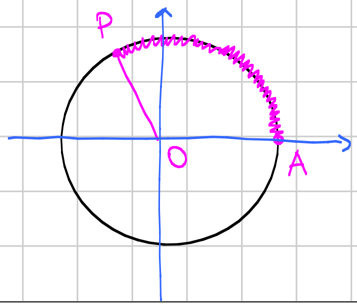


Angolo: quello formato dal semiasse positivo delle x e il segmento OP misurato in senso antiorario.

Giri successivi: gli angoli sono definiti a meno di multipli di 360°:

- angoli $\geq 360°$ = avere fatto più di una volta il giro
- angoli $< 0°$ = girare in senso orario (al contrario)

$\boxed{\text{RADIANTI}}$ Lunghezza del percorso che parte dalla linea di partenza (il p.to (1,0) della circ. trig.) e segue la circ. trigonometrica fino al p.to P



Tutto il giro = 360° = lunghezza circ. = 2π

- Archi $> 2\pi$ vuol dire fare più di un giro
- Archi < 0 " " girare al contrario

$\boxed{\text{Conversione gradi} \leftrightarrow \text{radianti}}$

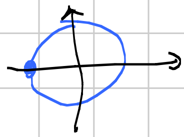
$$\boxed{\text{GRADI} : \text{RADIANTI} = 360° : 2\pi}$$

$0° \leftrightarrow 0$ $\qquad 45° \leftrightarrow \frac{\pi}{4}$ $\qquad 150° \leftrightarrow \frac{5\pi}{6}$

$90° \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$ $\qquad 30° \leftrightarrow \frac{\pi}{6}$ $\qquad 540° \leftrightarrow 3\pi$

$180° \leftrightarrow \pi$

$360° \leftrightarrow 2\pi$ $\qquad 60° \leftrightarrow \frac{\pi}{3}$



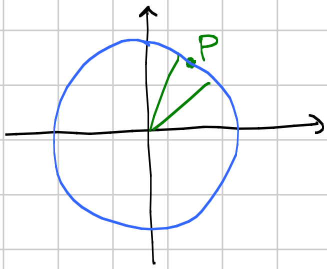
$270° \leftrightarrow \frac{3\pi}{2}$ $\qquad 120° \leftrightarrow \frac{2\pi}{3}$

$10°$

$$\text{GRADI} : \text{RAD} = 360° : 2\pi$$

$$10° : \text{RAD} = 360° : 2\pi \qquad \text{RAD} = \frac{2\pi \cdot 10°}{360°} = \frac{\pi}{18}$$

Dove si trova il p.to corr. ad 1 RADIANTE



$$\text{GRADI} : \text{RAD} = 360° : 2\pi$$

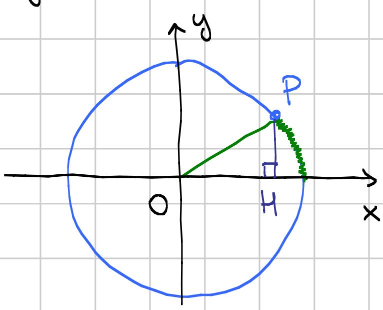
$$\text{GRADI} : 1 = 360° : 2\pi$$

$$\text{GRADI} = \frac{1 \cdot 360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3,\ldots}$$

$= $ un po' meno di $60°$

— o — o —

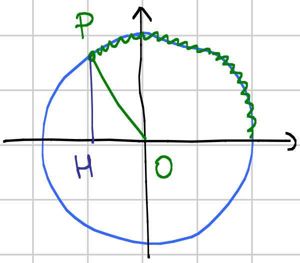
Definizione di sen, cos, tan.



Sia P un p.to della circ. trig. corrispondente ad un arco α. Le coordinate di P sono

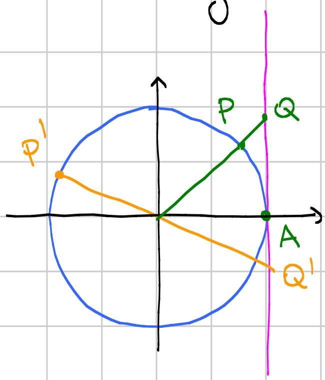
$$P = (\underset{\overset{\shortparallel}{OH}}{\cos\alpha}, \underset{\overset{\shortparallel}{PH}}{\sin\alpha})$$

OH e PH vanno pensati con segno



PH è positivo

OH è negativo



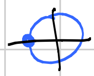
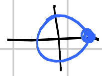
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

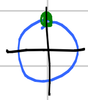
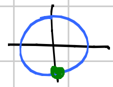
$= AQ$

la tangente si misura sempre sulla retta tangente in A ed è >0 se il p.to Q si trova sopra A, negativa se si trova sotto A

$\tan\alpha > 0$ nel 1° e nel 3° quadrante

$\tan\alpha < 0$ nel 2° e nel 4° quadrante

$\tan\alpha = 0$ per P corrispondenti a  

tan α non è definita  

Geometricamente: OP non incontra la retta tangente in A

Algebricamente: $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ richiede $\cos\alpha \neq 0$, ma $\cos\alpha = 0$

quando la coord. x di P è $=0$, cioè nei 2 p.ti incriminati

$\boxed{\text{RELAZIONE FONDAMENTALE}}$: $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

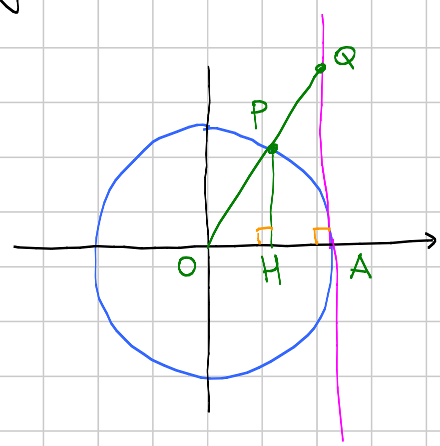
Geometricamente è il teo. di Pitagora: $OH^2 + PH^2 = OP^2 = 1$

Perché $\tan\alpha = AQ$?

I triangoli OHP e OAQ sono simili (stessi angoli), quindi hanno i lati in proporzione

$\dfrac{PH}{OH} = \dfrac{AQ}{OA}$, cioè

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{AQ}{1}$ ← Raggio



$\boxed{\text{Angoli e archi notevoli}}$

$0^\circ \leftrightarrow 0$ rad. $\quad \cos 0 = 1, \ \sin 0 = 0, \ \tan 0 = 0$

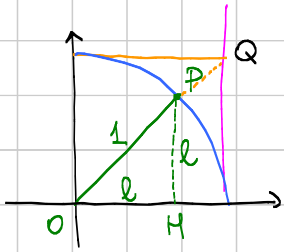
$90^\circ \leftrightarrow \pi/2$ rad. $\quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \ \sin \frac{\pi}{2} = 1, \ \tan \frac{\pi}{2}$ non def.

$180^\circ \leftrightarrow \pi$ rad. $\quad \cos \pi = -1, \ \sin \pi = 0, \ \tan \pi = 0$

$270^\circ \leftrightarrow \frac{3\pi}{2}$ rad $\quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \ \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \ \tan$ N.D.

$360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ rad $\quad \cos(2\pi) = 1, \ \sin(2\pi) = 0, \ \tan(2\pi) = 0$

$45^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{4}$



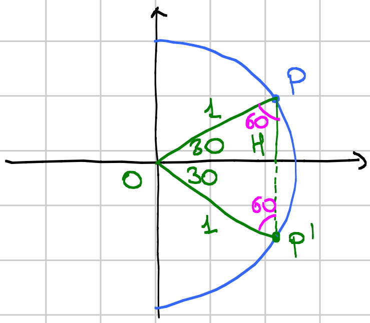
$OH = PH = \ell$

Pitagora: $\ell^2 + \ell^2 = 1$

$2\ell^2 = 1 \qquad \ell^2 = \frac{1}{2} \qquad \ell = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ell = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$30^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{6}$ radianti



il triangolo OPP' è equilatero, quindi $PP' = 1$ e di conseguenza $PH = \frac{1}{2}$

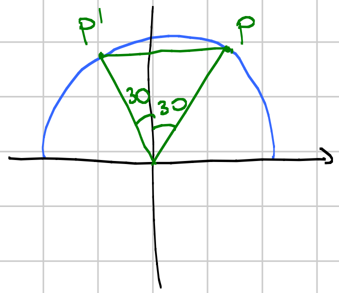
Quindi $\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Per calcolare il cos uso

Pitagora: $OH^2 = OP^2 - PH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

60° $\frac{\pi}{3}$ Esattamente come prima, ma ruotato di 90°

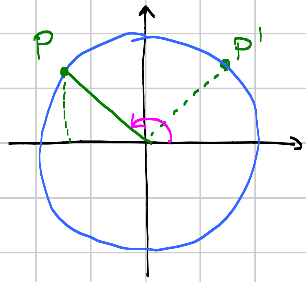


$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

— o — o —

$\frac{3\pi}{4}$ 135°



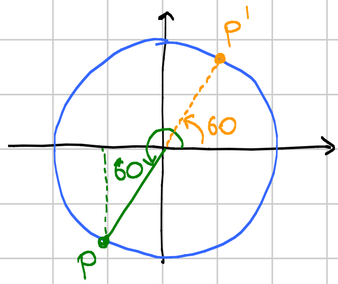
$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{3\pi}{4} = -1$

— o — o —

240° $\frac{4\pi}{3}$



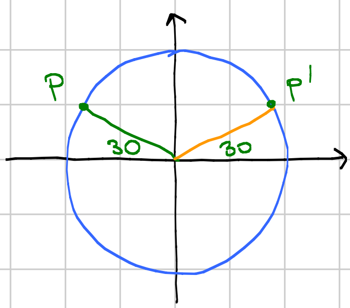
$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (individuano lo stesso p.to sulla retta tangente per A)

— o — o —

$\frac{5\pi}{6}$ 150°



$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ARCHI ASSOCIATI

α

$\pi-\alpha$

$\pi+\alpha$

$\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\frac{\pi}{2}+\alpha$

$-\alpha$

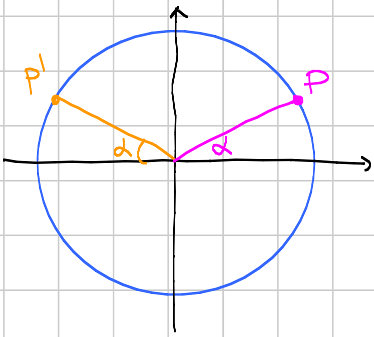
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$

Domanda: se conosco $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$, come trovo le funzioni trigonometriche degli archi associati?

Pensare al disegno !!!!

— o —

$\boxed{\pi-\alpha}$



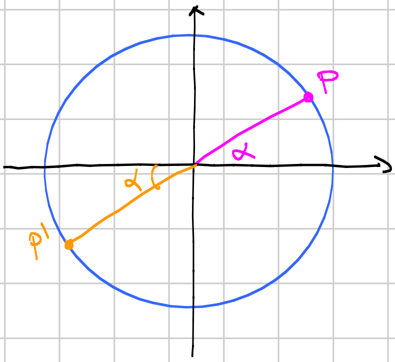
P' corrisponde a $\pi-\alpha$

P " al α

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

— o — o —

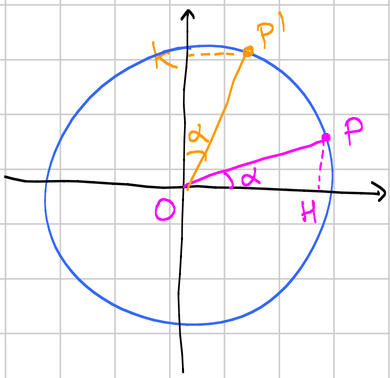
$\boxed{\pi+\alpha}$



$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$

— o — o —

$\boxed{\frac{\pi}{2}-\alpha}$



sin e cos si scambiano

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{= P'K} = \underbrace{\sin\alpha}_{= PH}$$

$$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{= OK} = \underbrace{\cos\alpha}_{= OH}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$\boxed{-\alpha}$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\boxed{\frac{\pi}{2}+\alpha}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$

Per esercizio ricavare (con disegno) $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

$2\pi \pm \alpha$ $\rightsquigarrow$ esattamente come $\pm\alpha$

$21\pi + \alpha \rightsquigarrow \pi + \alpha$

FORMULE TRIGONOMETRICHE

Titolo nota 22/09/2008

FORMULA FONDAMENTALE : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

ARCHI ASSOCIATI sin / cos / tan $\pi \pm \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$

FORMULE ADDIZIONE sin / cos / tan $\alpha \pm \beta$

FORMULE DUPLICAZIONE " " " 2α

" PRODOTTO → SOMMA $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dots + \dots$

" SOMMA → PRODOTTO $\sin\alpha + \sin\beta = \dots \cdot \dots$

— o — o —

FORMULE DI ADDIZIONE

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

RICORDARE

Gli archi associati sono particolari esempi di formule di addizione

$$\cos(\pi-\alpha) = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\cos\alpha + \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\sin\alpha$$
$$= -\cos\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha) = \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\cos\alpha + \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\sin\alpha = -\sin\alpha$$

— o — o —

DUPLICAZIONE $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ ($\alpha=\beta=x$ nella $\sin(\alpha+\beta)$)

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x\cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}}$$

RICORDARE

Esercizio

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) \\ &= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cdot\cos x - 2\sin x\cos x\sin x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x\cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) \\ &= \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x \\ &= 2\sin x\cos x\cdot\cos x + (1-2\sin^2 x)\cdot\sin x \\ &= 2\sin x\cdot\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

— o — o —

FORMULE PRODOTTO → SOMMA

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta && (1) \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta && (2) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta && (3) \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta && (4) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] && (1)+(2) \\ \sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] && (2)-(1) \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] && (3)+(4) \end{aligned}}$$

FORMULE SOMMA → PRODOTTO

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\underbrace{(\alpha+\beta)}_{x}+\cos\underbrace{(\alpha-\beta)}_{y} = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$ (altro modo di usare ① + ②)

$\alpha+\beta = x$
$\alpha-\beta = y$

Come ricavo α e β? Sommo: $2\alpha = x+y \to \alpha = \frac{x+y}{2}$

Sottraggo: $2\beta = x-y \to \beta = \frac{x-y}{2}$

Conclusione: $\underset{\uparrow\,\alpha+\beta}{\cos x} + \underset{\uparrow\,\alpha-\beta}{\cos y} = 2\cos\underset{\uparrow\,\alpha}{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\cdot\cos\underset{\uparrow\,\beta}{\left(\frac{x-y}{2}\right)}$

— o —

Formula per $\sin x + \sin y$.

$$\sin\underbrace{(\alpha+\beta)}_{x}+\sin\underbrace{(\alpha-\beta)}_{y} = 2\sin\alpha\cos\beta$$

Come prima: $\alpha = \frac{x+y}{2}$ $\beta = \frac{x-y}{2}$

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

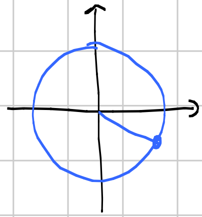
Analogamente: $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\updownarrow\,\alpha+\beta$ $\updownarrow\,\alpha-\beta$ $\updownarrow\,\alpha$ $\updownarrow\,\beta$

$\sin x - \sin y = -2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Esercizi $\boxed{1}$ $\sin 330° = \sin(-30°) = -\frac{1}{2}$

$\cos 330° = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



330° in radianti $\quad 360° - 30° \rightsquigarrow 2\pi - \frac{\pi}{6}$

$= \frac{11\pi}{6}$

$\boxed{2}$ $15° \rightsquigarrow \frac{\pi}{12}$ $\quad \cos(15°) = \cos(45° - 30°)$

$= \cos(45°)\cos(30°) + \sin(45°)\sin(30°)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin(15°) = \sin(60° - 45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{3}$ $75° \rightsquigarrow \frac{5\pi}{12}$

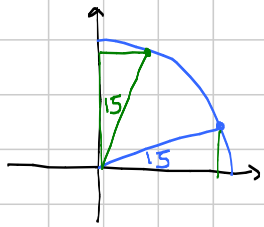
$75° = 60° + 15°$ esercizio

$75° = 45° + 30°$ "

$75° = 90° - 15°$

$\cos(75°) = \cos(90° - 15°) = \sin 15° = \dots$

$\sin(75°) = \sin(90° - 15°) = \cos 15° = \dots$



$\boxed{4}$ $2010° = 1800° + 210°$

$= 5 \cdot 360° + 210°$ $\quad$ (5 giri + 210°)

individua sulla circ. trigo. lo stesso punto individuato da 210°

$210° \rightsquigarrow 180° + 30° \rightsquigarrow \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

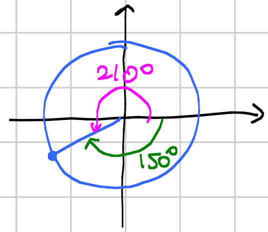
$2010° = 5 \cdot 360° + 210° \rightsquigarrow 10\pi + \frac{7\pi}{6} = \frac{67\pi}{6}$

$\cos(2010°) = \cos(210°) = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(2010°) = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

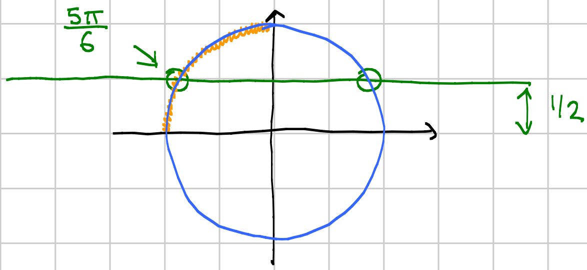
(5) Trovare un numero negativo $-n$ t.c. $210°$ individua lo stesso punto di $-n°$

$-150°$, $-150° - 360°$, ...

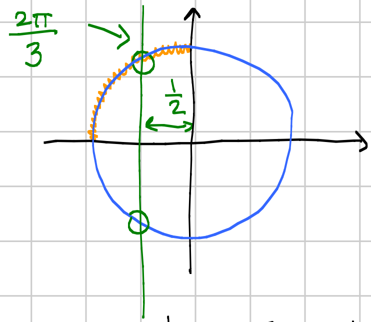


[6] Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{1}{2}$, quanto vale x ?

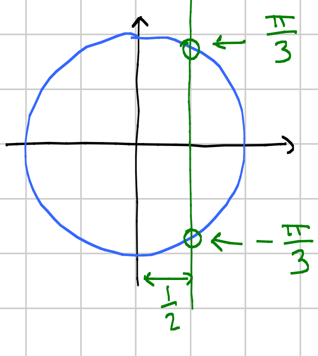
$x = \frac{5\pi}{6}$



[7] se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\cos x = -\frac{1}{2}$, allora $x = \frac{2\pi}{3}$



[8] Risolvere l'equazione $\cos x = \frac{1}{2}$. Guardo il cerchio !!!



Se voglio le soluzioni contenute in $[0, 2\pi]$, allora ho 2 soluzioni

$x = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{5\pi}{3}$

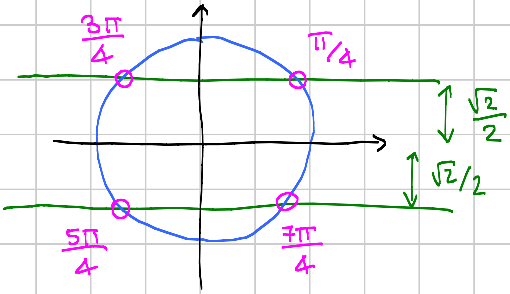
Se voglio TUTTE le soluzioni reali:

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con k intero

$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con k intero

9 $2\sin^2 x = 1 \qquad x \in [0, 2\pi]$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



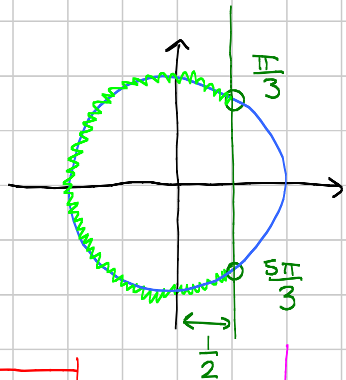
4 soluzioni

$x = \frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{3\pi}{4}$ in cui $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{5\pi}{4} \qquad x = \frac{7\pi}{4}$ in cui $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

— o — o —

10 $\boxed{\cos x \leq \frac{1}{2}} \qquad x \in [0, 2\pi]$

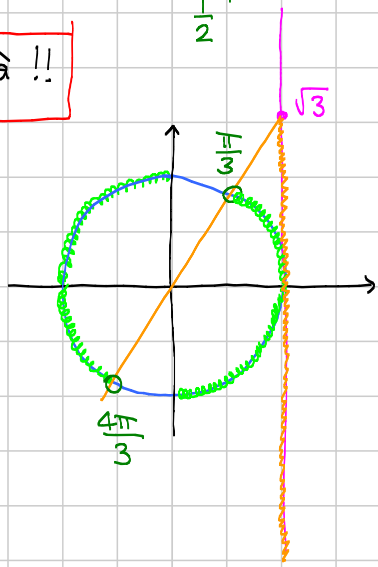


Cerco i p.ti della circ. trigon. con ASCISSA $\leq \frac{1}{2}$

Soluzione: $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Occhio!! $\left[\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$ è un'assurdità!!

11 $\tan x < \sqrt{3}$ in $[0, 2\pi]$

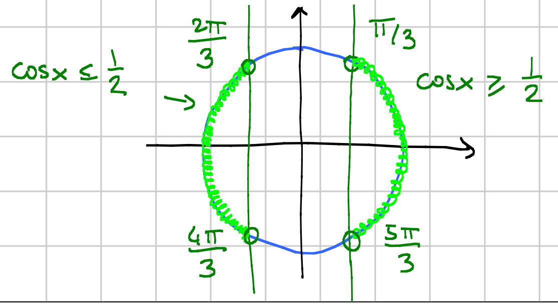


soluzione: $\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

— o — o —

12 $4\cos^2 x \geq 1 \qquad x \in [0, 2\pi]$

$\cos^2 x \geq \frac{1}{4} \qquad t^2 \geq \frac{1}{4}$ VALORI ESTERNI $t \leq -\frac{1}{2}$ e $t \geq \frac{1}{2}$



$\cos x \geq \frac{1}{2}$

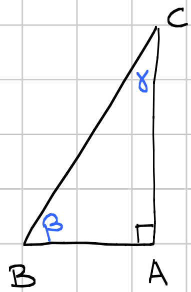
$\cos x \leq -\frac{1}{2}$

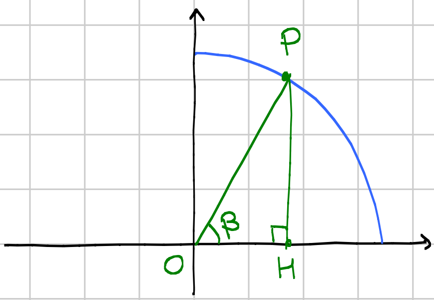
$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

TRIGONOMETRIA E TRIANGOLI

Titolo nota 23/09/2008

TRIANGOLO RETTANGOLO





Obiettivo della trigonometria applicata ai triangoli è la RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI (dati alcuni elementi, trovare i restanti).

Nel caso rettangolo ABC è simile a HOP, dunque i lati sono in proporzione

$$\frac{AB}{HO} = \frac{AC}{HP} = \frac{BC}{OP}$$

In HOP abbiamo che $OP = 1$, $OH = \cos\beta$, $PH = \sin\beta$

$$\frac{AB}{\cos\beta} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{1}$$

da qui si ricavano tutte le formule

$$\boxed{\begin{aligned} AB &= BC\cdot\cos\beta \\ AC &= BC\cdot\sin\beta \end{aligned}}$$

CATETI IN FUNZIONE DI IPOTENUSA E UN ANGOLO

Se invece di β conosco γ ho che $\beta = 90° - \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma$ quindi (archi associati)

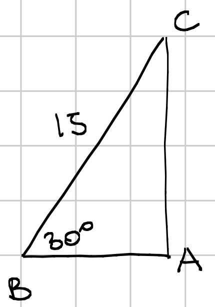
$$\cos\beta = \cos(90° - \gamma) = \sin\gamma, \quad \sin\beta = \sin(90° - \gamma) = \cos\gamma$$

$$\boxed{\begin{aligned} AB &= BC\cdot\sin\gamma \\ AC &= BC\cdot\cos\gamma \end{aligned}}$$

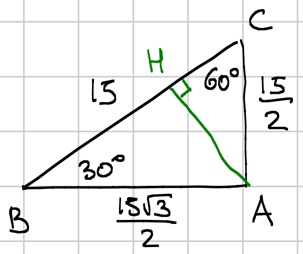
CATETI IN FUNZIONE DI IPOTENUSA E ALTRO ANGOLO

CATETO = IPOTENUSA ∘ ↗ COS ANGOLO ADIACENTE ↘ SIN ANGOLO OPPOSTO

Esercizio 1 $BC = 15$ $\hat{B} = 30°$ $\hat{A} = 90°$



Più in scala



$$AB = BC \cdot \cos 30° = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = 15 \cdot \sin 30° = 15 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

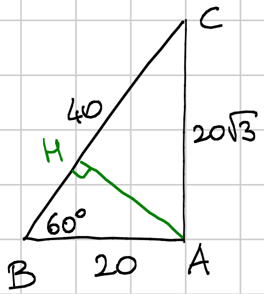
Per calcolare AH considero il triangolo rettangolo HCA

$$AH = AC \cdot \sin 60° = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

CATETO IPOT. ANGOLO OPPOSTO AL CATETO

—o—o—

Esercizio 2 $AB = 20$ $\hat{B} = 60°$ $\hat{A} = 90°$



$$AB = BC \cdot \cos 60° = BC \cdot \frac{1}{2}$$

$$BC = 2AB = 40 \; ; \; AC = BC \cdot \sin 60° = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

Guardo il triangolo rettangolo AHB

$$AH = AB \cdot \sin 60° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

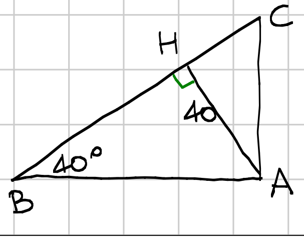
cateto ipot. angolo opposto

—o—o—

Esercizio 3 $\hat{B} = 40°$ $AH = 40$. Guardo AHB:

$$AH = AB \cdot \sin 40°$$

cateto ipot. angolo opposto



$$\Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin 40°} = \frac{40}{\sin 40°} = \ldots$$

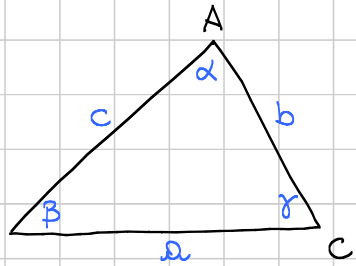
$BC \cdot \cos 40° = AB \rightsquigarrow$ trovo BC ...

TRIANGOLI QUALUNQUE

Quattro strumenti fondamentali:

1. FORMULA TRIGO PER AREA
2. TEO. CARNOT (TEO. COSENO)
3. FORMULA DI ERONE PER AREA
4. TEO. SENI

— o — o —



(0) NOTAZIONI STANDARD

p = semiperimetro = $\dfrac{a+b+c}{2}$

S = Area

R = raggio circ. circoscritta (quella che passa per A, B, C)

r = raggio circ. inscritta (tangente ai 3 lati)

— o — o —

(1) FORMULA TRIGONOMETRICA PER L'AREA

$$\boxed{S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta}$$

"Due lati per sin angolo compreso"

(2) TEOREMA DEL COSENO (CARNOT)

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

Per $\alpha = 90°$ diventa pitagora

(3) FORMULA DI ERONE PER L'AREA

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

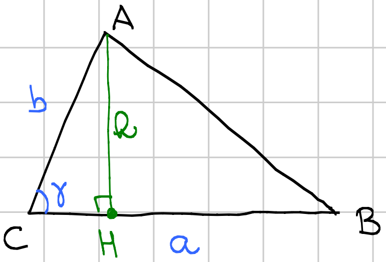
(4) TEO. SENI

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

$\dfrac{\text{lato}}{\text{sin ang. opposto}}$

Come si dimostrano?

(1) Situazione: conosco a, b, γ.
Voglio calcolare l'area



$S = \frac{1}{2} a \cdot h$. Devo calcolare h. Considero il triangolo rett.

CAH: $\underset{\uparrow\ \text{cateto}}{AH} = \underset{\uparrow\ \text{ipot.}}{AC} \cdot \underset{\uparrow\ \text{sin. angolo opposto}}{\sin\gamma} = b \sin\gamma$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\gamma$$

(2) Situazione: conosco a, b, γ. Voglio calcolare c, cioè AB.
Per Pitagora:

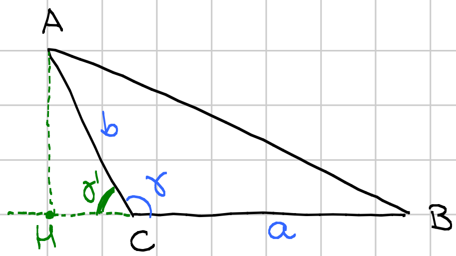
$$AB^2 = \underbrace{AH^2}_{\substack{\text{si calcola}\\ \text{come prima}}} + HB^2 \qquad HB = \underset{\uparrow\ \text{conosco}}{CB} - \underset{\uparrow\ \text{posso calcol.}}{CH}$$

$$AH = b \cdot \sin\gamma, \quad CH = b \cdot \cos\gamma, \quad HB = a - b\cos\gamma$$

$$\boxed{c^2} = AB^2 = AH^2 + HB^2 = (b \sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2$$
$$= b^2 \sin^2\gamma + a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$$
$$= b^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + a^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$\boxed{= b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma}$$

— o — o —

Fregatura:
In questa figura



$AH = AC \cdot \sin\gamma'$

$= AC \cdot \sin(180° - \gamma)$

$= AC \cdot \sin\gamma$ (quindi le formule precedenti valgono ancora)

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + (CB + HC)^2$

$HC = b \cdot \cos\gamma' = b \cdot \cos(180° - \gamma) = -b\cos\gamma$

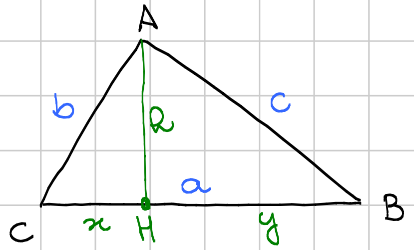
Aggiungere $-b\cos\gamma$ è come sottrarre $b\cos\gamma$

③ ERONE

Situazione:

conosco a, b, c.

Voglio calcolare S



$S = \frac{1}{2} a \cdot R$ Problema: calcolare R. Chiamo $x = CH$, $y = HB$

Scriviamo 3 equazioni che legano x, y, R (incognite)

$\begin{cases} x^2 + R^2 = b^2 \\ y^2 + R^2 = c^2 \\ x + y = a \end{cases}$ Pitagora in ACH / Pitagora in ABH / Somma di lunghezze

Risolvendo il sistema, si trovano x, y, R

Come si risolve il sistema?

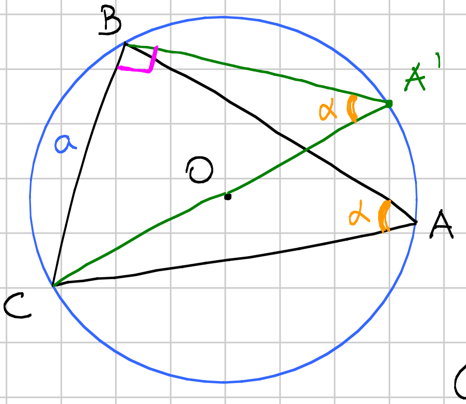
1ª equazione − 2ª equazione: $x^2 - y^2 = b^2 - c^2$

$\underbrace{(x+y)}_{a}(x-y) = b^2 - c^2$

$x - y = \frac{b^2 - c^2}{a}$; $x + y = a$ ⇝ trovo x e y ⇝ trovo R

—o—o—

④ TEO. SENI



- CA' è un diametro, quindi $A'\hat{B}C$ è di 90°
- $C\hat{A'}B = \alpha$ perché tutti gli angoli che insistono sulla corda BC e hanno il vertice sulla circonferenza hanno la stessa ampiezza

Considero il triangolo rettangolo $A'BC$

$BC = CA' \cdot \sin\alpha$, cioè $a = 2R \cdot \sin\alpha$,

↑ cateto ↑ ipotenusa (che è diametro) ↑ angolo opposto

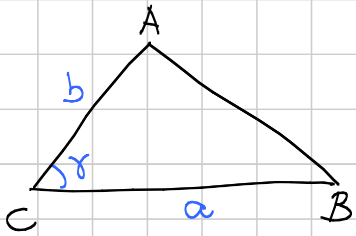
cioè

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

—o—o—

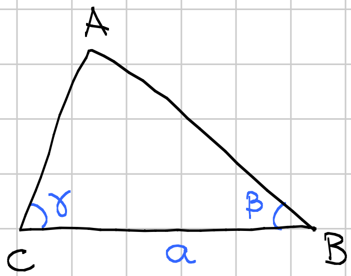
RISOLUZIONE DI TRIANGOLI

Caso 1 Noti 2 lati e l'angolo compreso.



1. Calcolo c con il teorema del COSENO
2. Per calcolare α e β posso ricorrere ancora al teo del coseno, oppure al teo dei seni

Caso 2 Noti 2 angoli e lato ad essi adiacente

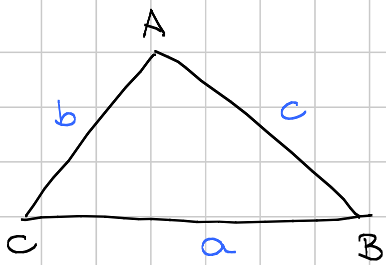


1. $\alpha = \pi - \beta - \gamma$
2. Uso poi il teo dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \boxed{a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$$

conosco tutto

Caso 3 Noti 3 lati. Voglio i 3 angoli



2 modi:

* teo. coseno e trovo i coseni degli angoli
* calcolo l'area con ERONE e quindi i seni degli angoli con la formula trigo. per l'area

— o —

ACHTUNG! È meglio conoscere il seno o il coseno dell'angolo di un triangolo?

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow \alpha = 30^\circ \text{ oppure } \alpha = 150^\circ$$

(Due possibilità)

Con il coseno ce n'è sempre UNO SOLO

MEGLIO IL COSENO !!!

TRIGONOMETRIA: ESERCIZI VARI

Titolo nota 23/09/2008

Esercizio 1 $a=7$ $b=6$ $c=5$, trovare angoli e area

Area si fa con Erone $p = \frac{a+b+c}{2} = 9$

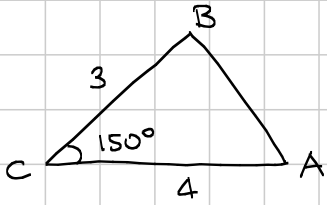
$$\text{Area} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \dots$$

Per gli angoli uso CARNOT: $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, quindi

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{36+25-49}{60} = \dots$$

Analogamente: $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Esercizio 2 $a=3$ $b=4$ $\gamma=150°$

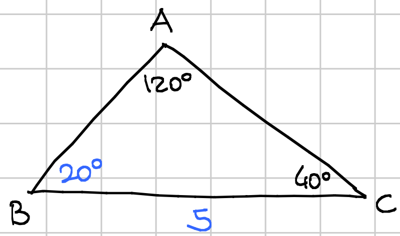


Per calcolare c uso

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$
$$= 9+16-24\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 9+16+12\sqrt{3}$$

Una volta noto c conosco i 3 lati e proseguo come prima

Esercizio 3 $a=5$ $\alpha=120°$ $\gamma=40°$



Si trova $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 20°$.

Se voglio calcolare b uso teo. seni

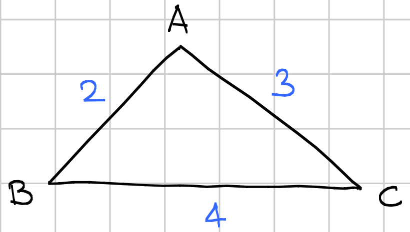
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$ Cosa conosco?

$$\frac{b}{\sin 20°} = \frac{5}{\sin 120°} \Rightarrow b = \frac{5\cdot\sin 20°}{\sin 120°} = \dots$$

Per calcolare c: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

$$= a\cdot\frac{\sin 40°}{\sin 120°} = \dots$$

Esercizio 4 Come capire se un triangolo è ottusangolo, rettangolo, acutangolo dati i lati



$a = 4,\ b = 3,\ c = 2$

L'angolo più grande (l'unico che può essere ottuso) è α.

Dunque basta capire se α è ottuso, retto, acuto. Si può capire dal segno di $\cos\alpha$, quindi uso teo. coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

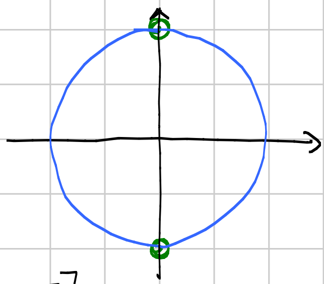
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow \text{tutto dipende dal segno di } b^2+c^2-a^2$$

Nel nostro caso: $9+4-16 < 0 \Rightarrow$ OTTUSANGOLO.

In generale tutto dipende dalla somma dei quadrati dei 2 lati + piccoli − il quadrato del lato + grande.

— o — o —

Esercizio 5 $\underbrace{\cos x = 0}_{\text{cerco i p.ti della circ. trigonometrica con ascissa } = 0}$ $x \in [0, 3\pi]$ Guardo il cerchio



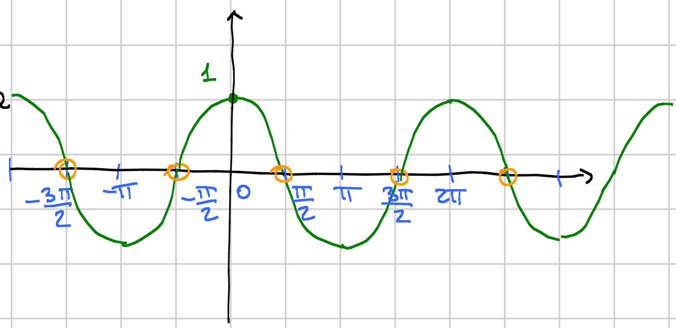
$x = \frac{\pi}{2},\quad x = \frac{3\pi}{2},\quad x = \frac{5\pi}{2}$

Se fosse stato: $\cos x = 0 \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

$x = -\frac{3\pi}{2} \qquad x = -\frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{3\pi}{2}$

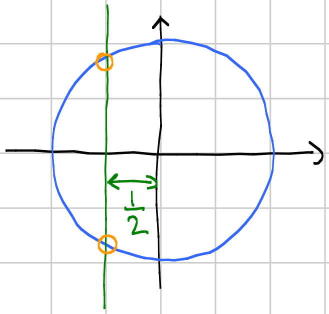
Grafico di $\cos x$

$\cos x = 0$ vuol dire trovare i valori di x in cui il grafico sta ad altezza 0, cioè tocca l'asse x

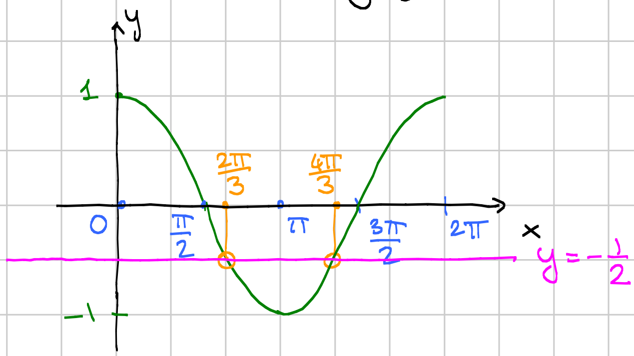


Es. 5 $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

Guardo il cerchio



Guardo il grafico



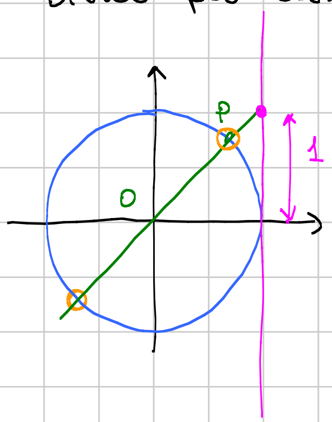
$x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$

— o —

Es. 6 $\cos x = \sin x$ $\quad x \in [0, 2\pi]$ Divido per $\cos x$:

$1 = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ $\quad x = \frac{5\pi}{4}$



Se fosse stato $x \in [-\pi, \pi]$?

$x = -\frac{3\pi}{4}$ $\quad x = \frac{\pi}{4}$

— o —

Es. 7 $\sin x \cdot \cos x = 1$ Molt. per 2: $2 \sin x \cdot \cos x = 2$

cioè $\sin(2x) = 2$ $\rightsquigarrow$ IMPOSSIBILE

— o —

Es. 8 $\cos^3 x = \cos x$; $\cos^3 x - \cos x = 0$

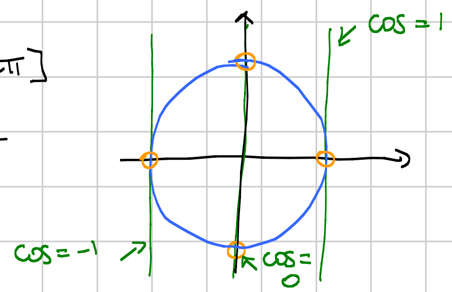
$\cos x (\cos^2 x - 1) = 0$

$\Rightarrow$ $\nearrow \cos x = 0$ $\qquad \cos x = 0$ $\qquad \cos x = 0$

$\quad \searrow \cos^2 x - 1 = 0$ $\qquad \cos^2 x = 1$ $\qquad \cos x = \pm 1$

Se abbiamo come limitazione $[0, 2\pi]$

$x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$



Es. 9 $\quad 2\cos^2 x + 5\sin x = 4 \qquad x \in [0, 2\pi]$

Cerchiamo di scrivere usando solo $\sin x$

$$2(1-\sin^2 x) + 5\sin x = 4$$

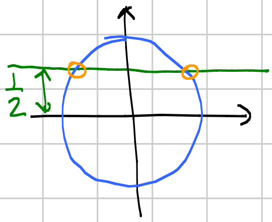
$$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \; ; \quad -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \qquad \sin x = t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tornando in $\sin x$ ottengo



$t = 2 \qquad \sin x = 2 \rightarrow$ NULLA

$t = \frac{1}{2} \qquad \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \; x = \frac{5\pi}{6}$

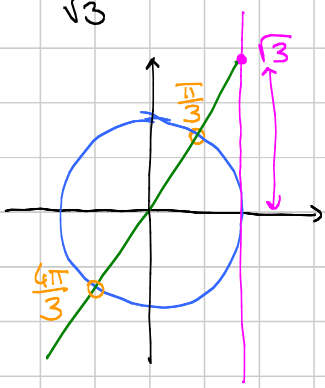
— o —

Es. 10 $\quad 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = 2\cos^2 x$

FORMULE DUPLICAZIONE

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{3}} = 2\cos^2 x - 1 \; ; \quad \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3}} = \cos(2x)$$

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \sqrt{3} \; ; \quad \tan(2x) = \sqrt{3}$$



$2x = \frac{\pi}{3} \qquad x = \frac{\pi}{6}$

$2x = \frac{4\pi}{3} \qquad x = \frac{2\pi}{3}$

soluzioni in $\boxed{[0, 2\pi]}$

NO!!! solo in $[0, \pi]$

È corretto che $\quad 2x = \frac{\pi}{3} \quad$ e $\quad 2x = \frac{4\pi}{3}$, ma anche

$$2x = \frac{7\pi}{3} \quad \text{e} \quad 2x = \frac{10\pi}{3}$$

Dividendo per 2 trovo $\quad x = \frac{\pi}{6}, \; x = \frac{2\pi}{3}, \; x = \frac{7\pi}{6}, \; x = \frac{5\pi}{3}$

sono tutte soluzioni tra 0 e 2π.

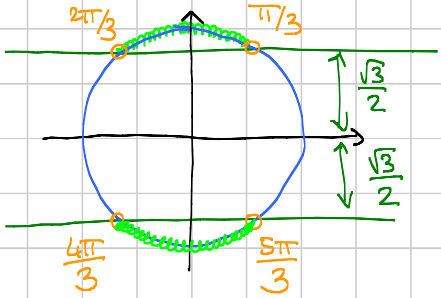
Morale: se ho un'eq. con sin / cos / tan $(2x)$ e voglio $x \in [0, 2\pi]$, devo considerare tutte le sol. con $2x \in [0, 4\pi]$

Es. 11 $4\sin^2 x > 3$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

$\sin^2 x > \frac{3}{4}$ $\quad$ VALORI ESTERNI

$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Guardo il cerchio e cerco i p.ti con coord. y maggiore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure minore di $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



In $[0, 2\pi]$ la sol. è $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

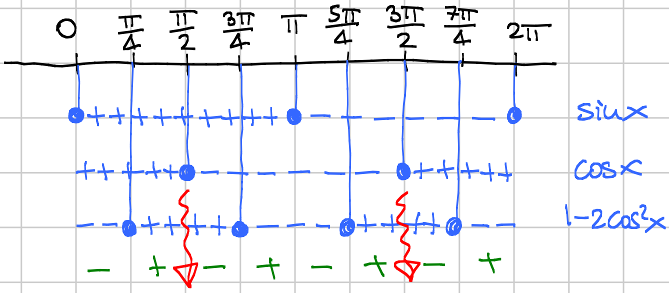
Es. 12 $\tan x \geq \sin(2x)$ $\quad$ Uso formule;

$\frac{\sin x}{\cos x} \geq 2 \sin x \cos x$ $\quad$ VIETATO MOLTIPLICARE PER $\cos x$

Porto tutto a sx : $\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x \geq 0$

$\frac{\sin x - 2\sin x \cos^2 x}{\cos x} \geq 0$ $\qquad$ $\frac{\sin x\,(1 - 2\cos^2 x)}{\cos x} \geq 0$

Risolvo come prodotto / quoziente, studiando il segno dei 3 termini in $[0, 2\pi]$



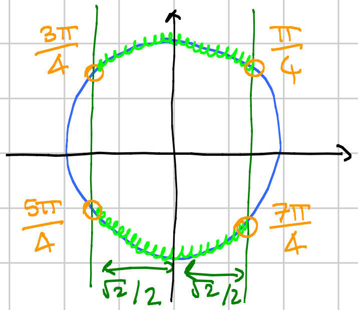
$1 - 2\cos^2 x > 0 \iff 2\cos^2 x < 1$

$\iff \cos^2 x < \frac{1}{2}$.

Valori interni

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Guardo il cerchio!



A noi interessava ≥ 0:

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup$

$\cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

GEOMETRIA ANALITICA

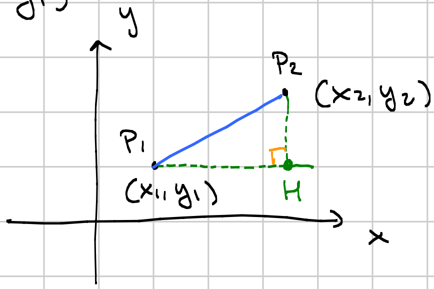
Titolo nota 24/09/2008

Piano cartesiano, punti e coordinate,

DISTANZA TRA DUE PUNTI $P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Interpretazione geometrica



$$(P_1P_2)^2 = (P_1H)^2 + (P_2H)^2 \quad \text{(Pitagora)}$$
$$= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

— o — o —

EQUAZIONE DELLA RETTA 2 forme

1ª FORMA $\boxed{y = mx + n}$ m, n coefficienti dati

VANTAGGI:
- m e n possono essere numeri qualsiasi
- due rette coincidono $\Leftrightarrow$ hanno stesso m e stesso n

SVANTAGGI: non tutte le rette si rappresentano in questa forma. Mancano infatti quelle verticali che vanno scritte come $\boxed{x = a}$

2ª FORMA $\boxed{ax + by + c = 0}$ a, b, c coeff. dati

VANTAGGI: tutte le rette (comprese quelle verticali) si rappresentano in questa forma.

SVANTAGGI:
- non è vero che per ogni terna a, b, c ottengo una retta (infatti almeno uno tra a e b deve essere $\neq 0$)
- non è vero che equazioni diverse rappresentano rette diverse (posso molt. tutto per un numero)

Oss. In forma $ax+by+c=0$ due equaz. rappresentano la stessa retta $\iff$ sono l'una multipla dell'altra.

PASSAGGIO DA UNA FORMA ALL'ALTRA

$y = mx + n \rightsquigarrow y - mx - n = 0$

$x = a \rightsquigarrow x - a = 0$

$ax + by + c = 0 \rightsquigarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (ricavo y)

Possibile $\iff b \neq 0$

Se $b=0$, allora per forza $a \neq 0$, ma allora ricavo $x = -\frac{c}{a}$ e ottengo una retta verticale

Oss. In forma $ax+by+c=0$ una retta è

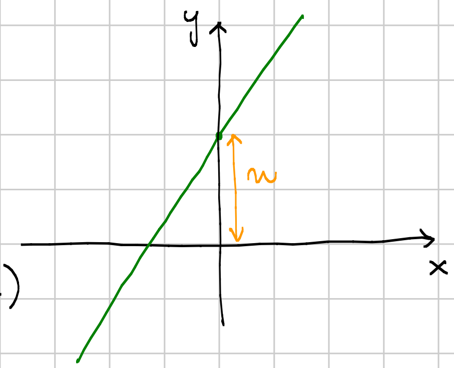
VERTICALE $\iff b=0$

ORIZZONTALE $\iff a=0$

— o — o —

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI m ED n.

$\boxed{y = mx + n}$

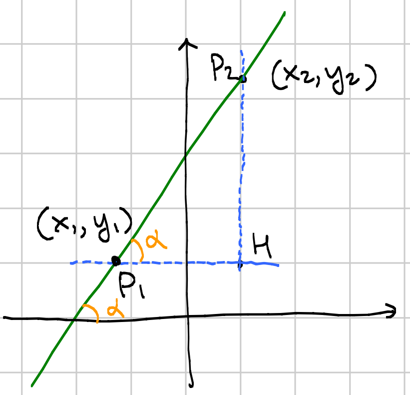


n = valore di y quando metto $x=0$

= $\boxed{\text{ascissa}}$ dell'intersezione tra retta e asse y

ORDINATA: corretto dopo video!

Aumentare n (lasciando invariato m) vuol dire aggiungere ad y una quantità costante = traslare la retta in alto parallelamente a se stessa



$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, mx_1 + n)$

$P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, mx_2 + n)$

$P_1H = x_2 - x_1$

$P_2H = y_2 - y_1 = mx_2 + n - (mx_1 + n)$

$= m(x_2 - x_1)$

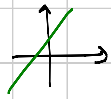
$$\frac{P_2H}{P_1H} = \frac{m\,(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = m = \text{rapporto tra i 2 cateti}$$

$$P_1H = P_1P_2 \cdot \cos\alpha \qquad \frac{P_2H}{P_1H} = \frac{\cancel{P_1P_2}\cdot \sin\alpha}{\cancel{P_1P_2}\cdot\cos\alpha} = \tan\alpha$$

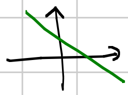
$$P_2H = P_1P_2 \cdot \sin\alpha$$

m = coeff. angolare = $\tan\alpha$, dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse x e con ogni retta ad esso parallela

Oss. $m>0 \iff \tan\alpha>0 \iff \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \iff$



$m<0 \iff \tan\alpha<0 \iff \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right) \iff$



— o — o —

Esercizio: Scrivere l'eq. della retta che passa per $(1,1)$ e $(2,3)$.

0° modo: ricordare la formula per la retta che passa per 2 p.ti

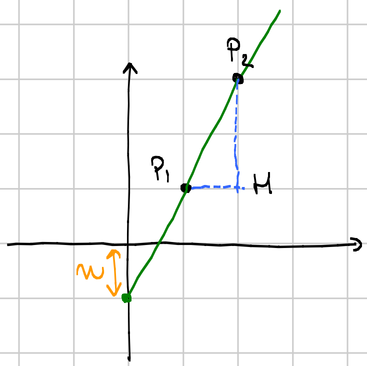
1° modo: l'equazione sarà della forma $y = mx+n$. Impongo di passare per i 2 p.ti

$$\begin{cases} 1 = m+n & \text{(sostituito } (1,1)) \\ 3 = 2m+n & \text{(sostituito } (2,3)) \end{cases}$$

Ottengo un sistema in m ed n che si risolve

2ª eq. − 1ª eq.: $2 = m$ e dalla 1ª ottengo $n=-1$

$y = 2x-1$



2° modo: uso i quadretti!!

$$m = \frac{P_2H}{P_1H} = \frac{2}{1} = 2$$

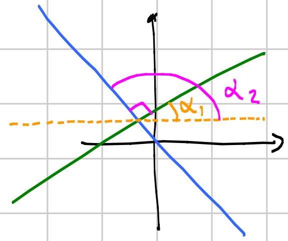
$$n = -1 \qquad y = 2x-1$$

RETTE PARALLELE "$\Longleftrightarrow$" stesso m (vale per rette non verticali)

RETTE PERPENDICOLARI: Due rette $y = m_1 x + n_1$ e $y = m_2 x + n_2$ sono perpendicolari "$\Longleftrightarrow$"

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

In termini di angoli sia α_1 l'angolo corrisp. alla prima e α_2 quello corrispondente alla seconda



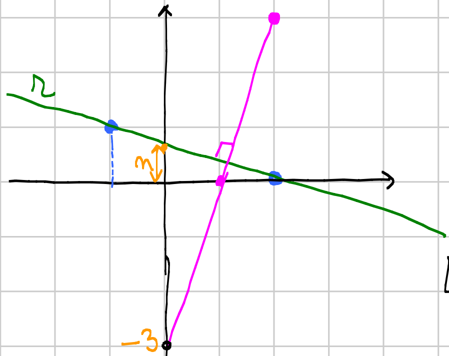
rette perpendicolari $\Longleftrightarrow$ $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$

ma allora $m_2 = \tan \alpha_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)$

archi associati $\nwarrow = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$

— o — o —

Esercizio [1] Scrivere eq. retta passante per $(-1, 1)$ e $(2, 0)$



Coeff. ang. negativo $m = -\frac{1}{3}$

$n = \frac{2}{3} \implies y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

[2] Scrivere l'eq. della retta parallela ad r passante per $(0,5)$.

Sarà del tipo $y = \underbrace{\boxed{m}}_{\text{stesso di } r} x + n$ $\qquad y = -\frac{1}{3}x + n$

Impongo di passare per $(0,5)$: $\quad 5 = -\frac{1}{3} \cdot 0 + n \implies n = 5$

[3] Scrivere l'eq. della retta perpendicolare ad r e passante per $(2,3)$. Sarà $y = mx + n$ con $m = 3 \implies y = 3x + n$

Impongo di passare per $(2,3)$: $\quad 3 = 3 \cdot 2 + n \implies n = -3$

Quindi la retta è

$$y = 3x - 3$$

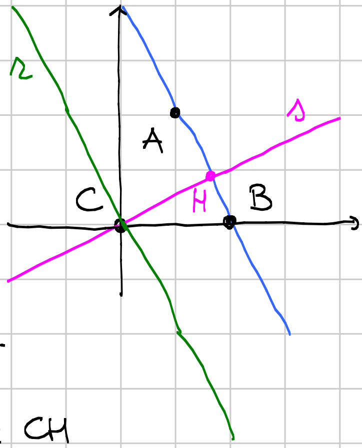
Esercizio

r = retta per C // ad AB

s = retta per C $\perp$ ad AB

d = distanza tra C e retta AB

$A=(1,2)$ $B=(2,0)$ $C=(0,0)$



retta AB : $y=-2x+4$

retta r : $y=-2x$

retta s : $y=\frac{1}{2}x$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Distanza di C dalla retta AB = lungh. di CH

Quindi dovrei : 1. Scrivere l'eq. della $\perp$

2. Trovare l'intersezione

3. Calcolare la distanza

La formula che si ottiene è questa:

La distanza di $P=(x_0,y_0)$ da una retta di eq. $ax+by+c=0$ è

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

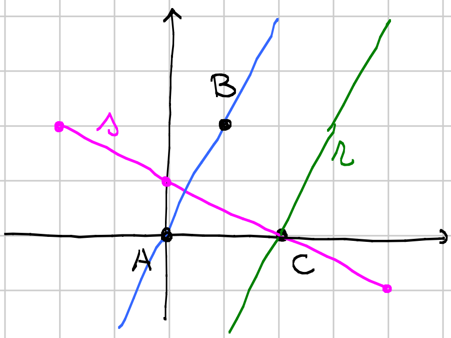
Il denom. non è mai $=0$

Nel nostro caso $\boxed{C=(0,0)}$ retta AB : $y=-2x+4$, cioè $\boxed{y+2x-4=0}$

$$d=\frac{|0+2\cdot 0-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

— o — o —

ALTRO CASO $A=(0,0)$, $B=(1,2)$, $C=(2,0)$



retta AB: $y=2x$ oppure $y-2x=0$

retta per C // ad AB : $y=2x-4$

retta per C $\perp$ ad AB: $y=-\frac{1}{2}x+1$

distanza di C da retta AB

$$d=\frac{|0-2\cdot 2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$ ← corretto dopo VIDEO

GEOMETRIA ANALITICA 2

Titolo nota 24/09/2008

FORMULA DELLA RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. La retta sarà $y = mx + n$

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Passare per P_1
Passare per P_2

Risolvo il sistema nelle incognite m ed n

1ª eq. − 2ª eq.: $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \Rightarrow m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

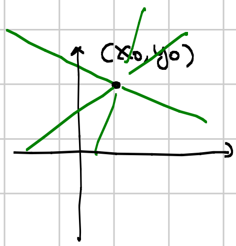
Per trovare n uso 1ª eq: $n = y_1 - mx_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$

Quindi $y = mx + n$ diventa $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$

Faccio un po' di algebra $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ e dividendo

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

— o — o —



FASCIO DI RETTE PER UN PUNTO $P = (x_0, y_0)$

Saranno rette del tipo $y = mx + n$. Impongo di passare per P: $y_0 = mx_0 + n \Rightarrow n = y_0 - mx_0$

Quindi $y = mx + y_0 - mx_0$, che equivale a

$y - y_0 = mx - mx_0$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

al variare di m descrive tutte le rette (non verticali) passanti per (x_0, y_0)

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Dati: centro $P=(x_0,y_0)$, Raggio $R>0$

Circonferenza con centro P e raggio R = insieme dei p.ti (x,y) del piano la cui distanza da P è $=R$.

$$\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{\text{Distanza di }(x,y)\text{ da }(x_0,y_0)} = \underbrace{R}_{\text{Raggio}}$$

Facendo il quadrato:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2}$$

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=R^2$$

$$x^2+y^2\underbrace{-2x_0}_{a}x\underbrace{-2y_0}_{b}y+\underbrace{x_0^2+y_0^2-R^2}_{c}=0$$

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

Oss 1 Possono esserci dei coeff. davanti a x^2 e y^2. L'importante è che il coeff. sia $\boxed{\text{lo stesso}}$

Oss 2 Non compare MAI il termine xy.

1. Dati a,b,c, la formula rappresenta sempre una circonferenza?
2. Dati a,b,c, come ricostruire le coordinate del centro e il raggio?

$a=-2x_0$ $\qquad$ $b=-2y_0$ $\qquad$ $c=x_0^2+y_0^2-R^2$

$$\boxed{x_0=-\frac{a}{2}} \qquad \boxed{y_0=-\frac{b}{2}} \qquad \boxed{R^2}=-c+x_0^2+y_0^2 \boxed{=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$

La condizione affinché sia una circonferenza è che

$$-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}>0$$

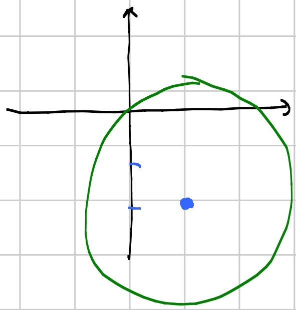
<u>Esercizio 1</u> $\quad x^2+y^2-2x+4y=0 \qquad a=-2 \quad b=4 \quad c=0$

$x_0=-\frac{a}{2}=1 \qquad y_0=-\frac{b}{2}=-2 \qquad R^2=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =-0+\frac{4}{4}+\frac{16}{4}=5$

$R=\sqrt{5}$

Quando $c=0$ la circ. passa per l'origine



$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\quad x^2+y^2-2x+4y=0$

$x^2-2x+1+y^2+4y+4=1+4$

$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad \Rightarrow x_0=1,\ y_0=-2,\ R=\sqrt{5}$

— o — o —

<u>Esercizio 2</u> $\quad x^2+y^2-6x-7=0$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $\quad a=-6 \quad b=0 \quad c=-7$

$x_0=-\frac{a}{2}=3, \qquad y_0=-\frac{b}{2}=0, \qquad R^2=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$

$R=4. \qquad\qquad =7+\frac{36}{4}+0=16$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\quad x^2+y^2-6x-7=0; \quad \underbrace{x^2-6x+9}+\underbrace{y^2}-7=9$

$(x-3)^2+y^2=16$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

— o — o —

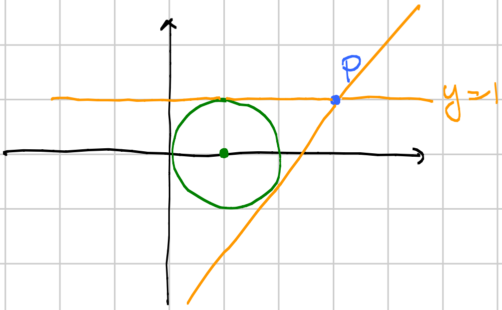
<u>Esercizio 3</u> $\quad x^2+y^2-2x=0 \qquad P=(3,1)$. Determinare rette per P tangenti alla circonferenza.

$x^2+y^2-2x=0; \quad x^2-2x+1+y^2=1$

$(x-1)^2+y^2=1$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad x_0=1,\ y_0=0,\ R=1$

Ci saranno 2 rette tangenti, di cui una si vede "ad occhio"



Scrivo tutte le rette per P
$y = mx + n$ e impongo di passare per P:
$1 = 3m + n \Rightarrow n = 1 - 3m$
$\Rightarrow y = mx + 1 - 3m = m(x-3) + 1$

Devo imporre alla retta $y = m(x-3)+1$ di essere tg. alla circ. $x^2+y^2-2x=0$. Le metto a sistema e impongo di avere un'unica intersezione.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y = m(x-3)+1 \end{cases}$$

$x^2 + [m(x-3)+1]^2 - 2x = 0$
$x^2 + m^2(x-3)^2 + 1 + 2m(x-3) - 2x = 0$
$x^2 + m^2x^2 - 6m^2x + 9m^2 + 1 + 2mx - 6m - 2x = 0$
$x^2(1+m^2) + (-6m^2+2m-2)x + 9m^2 - 6m + 1 = 0$

Equazione di 2° grado che deve avere 1 sola soluz. $\Rightarrow \Delta = 0$

$$(1+m^2)x^2 - 2(3m^2 - m + 1)x + 9m^2 - 6m + 1 = 0$$

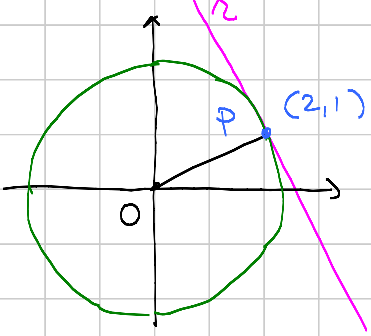
$$\Delta = (3m^2 - m + 1)^2 - (9m^2 - 6m + 1)(1+m^2) = 0$$

Si ottiene così un'equazione in m le cui soluzioni sono i valori di m per cui la retta è tangente.
Quante soluz. ci aspettiamo? DUE perchè 2 sono le rette tg.
Una di queste soluz. DEVE ESSERE $m = 0$ (e infatti lo è).

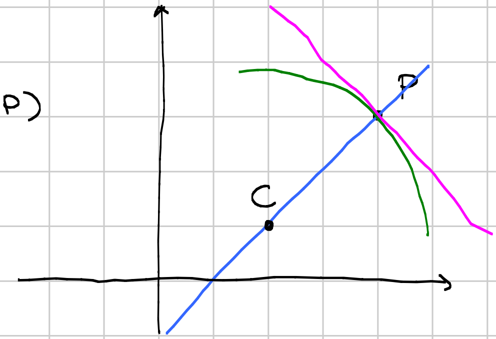
— o — o —

<u>Esercizio 4</u> $x^2+y^2 = 5$ centro $C = (0,0)$ $R = \sqrt{5}$

$P = (2,1)$ p.to della circ. Scrivere eq. retta tangente
La retta tg. è $\perp$ al raggi OP
Eq. di OP: $y = \frac{1}{2}x$
retta r: $y = -2x + 5$ Perchè sarà $y = -2x + n$. Impongo di passare per P: $1 = -2 \cdot 2 + n$
$\Rightarrow n = 5$



Esercizio 5 Circonferenza con centro in (2,1) e passa per (4,3)



$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ $R=\text{dist}(C,P)$

$(x-2)^2+(y-1)^2=(2\sqrt{2})^2$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1=8$

$\boxed{x^2+y^2-4x-2y-3=0}$

retta CP: $y=x-1$; retta tg: $y=-1\cdot x+n$

impongo di passare per P: $3=-4+n \Rightarrow n=7$

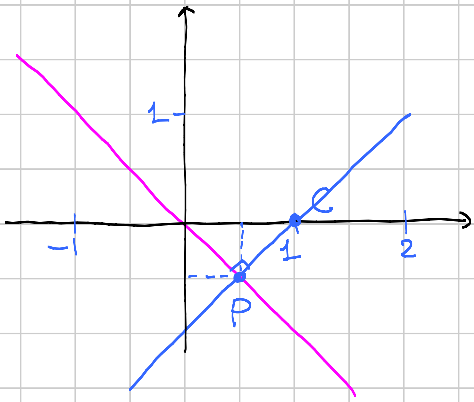
—o—o—

Esercizio 6 Centro (1,0) Tangente alla retta $x+y=0$

Raggio = distanza di C dalla retta

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

centro: (1,0) e $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$



$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \longrightarrow (x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$

$x^2-2x+1+y^2=\frac{1}{2} \rightarrow 2x^2-4x+2+2y^2=1 \rightarrow 2x^2+2y^2-4x+1=0$

Per trovare il p.to P in cui la circonferenza tange la retta:

$\boxed{1^\circ\text{ modo}}$ interseco la retta con la circonferenza

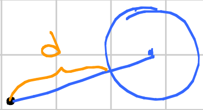
$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-4x+1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

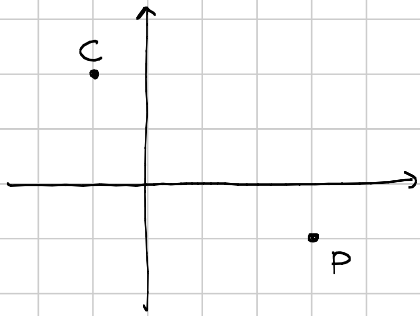
Mi aspetto soluz. unica, cioè $\Delta=0$

$\boxed{2^\circ\text{ modo}}$ Nel punto in cui la perpendicolare per C trova la retta data. Si trova (facendo i conti o guardando la figura) $P=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Esercizio 7 Trovare il valore di a per cui la distanza tra $(3,-1)$ e la circ.

$x^2+y^2+2x-4y=a$ è 2





Distanza di P da una circ =
= dist (P, centro) − raggio

$$x^2+y^2+2x-4y=a$$
$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=a+1+4$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=a+5$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad \rightarrow \quad x_0=-1,\ y_0=2$$

Distanza (P, centro) = dist $((-1,2),(3,-1)) = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

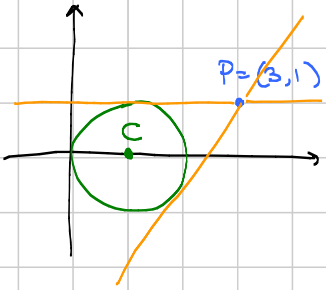
Distanza − raggio = 2 $\Rightarrow$ raggio = 3

Per quale valore di a la circ. ha raggio 3 ?

$$R^2=a+5 \qquad 9=a+5 \quad \rightarrow \quad a=4.$$

GEOM. ANALITICA E INSIEMI DEL PIANO

Titolo nota 25/09/2008



$$\begin{cases} y-1 = m(x-3) \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$ generica retta per P / Eq. circ.

Sostituisco y nella 2ª eq.

Ottengo una eq. di 2° grado in x

Impongo $\Delta = 0$ e trovo i possibili valori di m

2° metodo Le rette tangenti sono le uniche rette r tali che

$$\text{dist}(C, r) = \text{raggio} = 1$$

La generica retta per P ha equazione $y - m(x-3) - 1 = 0$ (r)

$y - mx + (3m-1) = 0$

$$\text{dist}(C,r) = \frac{|0 - m(1-3) - 1|}{\sqrt{1^2+m^2}} = 1, \text{ cioè } \frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = 1,$$

$|2m-1| = \sqrt{m^2+1}$ Faccio il quadrato a dx e sx

$(2m-1)^2 = m^2+1$, cioè $4m^2 - 4m \cancel{+1} = m^2 \cancel{+1}$,

$3m^2 - 4m = 0$ $\quad m(3m-4) = 0$ $\nearrow m = 0$, $\searrow m = \frac{4}{3}$

— o — o —

Es 1 Retta $ax + 3y + 2 = 0$ passa per $(1,1)$.

Sostituisco $(1,1)$ nell'eq: $a + 3 + 2 = 0 \Rightarrow a = -5$

Es. 2 Stessa retta parallela alla retta $y = 2x$.

Impongo stesso coeff. ang. $3y = -ax - 2$; $y = \boxed{-\frac{a}{3}}x - \frac{2}{3}$

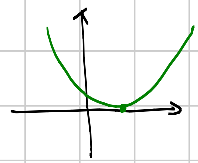
$-\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = -6$

Es. 3 Stessa retta $\perp$ alla retta $y = 2x$. Impongo coeff. ang. $= -\frac{1}{2}$

$-\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Es. 4 Parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente all'asse x

Impongo che l'eq. $ax^2 + ax + 1 = 0$ abbia una sola soluz., cioè $\Delta = 0$



$\Delta = a^2 - 4a = 0$, $a(a-4) = 0$

$a = 0 \rightarrow$ in questo caso però non è una parabola

$a = 4 \rightarrow$ SOLUZIONE BUONA

Nel caso $a = 4$, qual è il p.to di tangenza? Devo risolvere

$4x^2 + 4x + 1 = 0$, $(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1/2$

Es. 5 Parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente a

L'eq. della brs. è $y = -x$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = ax^2 + ax + 1 \end{cases} ; \quad -x = ax^2 + ax + 1; \quad ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 - 4a = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Es. 6 Retta $ax + 3y + 2$ tangente alla parabola $y = x^2 - 10$

Metto a sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = x^2 - 10 \end{cases} \qquad -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} = x^2 - 10 \qquad \frac{2}{3} - 10 = \frac{2-30}{3}$$

$$x^2 + \frac{a}{3}x - \frac{28}{3} = 0 \qquad 3x^2 + ax - 28 = 0$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 + 28 \cdot 12 = 0 \Rightarrow$ Non ci sono soluzioni

Es. 7 La retta $ax + 3y + 2 = 0$ tangente alla circ. $5x^2 + 5y^2 = 2a$

1° modo: metto a sistema, sostituisco y (o x) e impongo $\Delta = 0$

2° modo: distanza del centro dalla retta = raggio circ.

$x^2 + y^2 = \frac{2a}{5}$ $\qquad x_0 = 0, y_0 = 0 \Rightarrow$ centro $= (0, 0)$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ $\qquad R^2 = \frac{2a}{5} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2a}{5}}$ (serve $a > 0$)

Distanza $(C, \text{retta}) = \dfrac{|a \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + 9}} = \text{raggio} = \sqrt{\dfrac{2a}{5}}$. Faccio i quadr.

$$\frac{4}{a^2+9} = \frac{2a}{5} \Leftrightarrow 20 = 2a^3 + 18a \Leftrightarrow a^3 + 9a - 10 = 0$$

Devo risolvere l'eq. di 3° grado $a^3+9a-10=0$. Si spera che ci sia una radice razionale (tentativi da fare: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$)

$a=1$ va bene $\Rightarrow$ posso dividere per $a-1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
a^3 & & +9a & -10 & a-1 \\ \cline{5-5}
-a^3 & +a^2 & & & a^2+a+10 \\ \cline{1-4}
// & a^2 & +9a & -10 & \\
& -a^2 & +a & & \\ \cline{2-4}
& & 10a & -10 & \\
& & -10a & +10 & \\ \cline{3-4}
& & // & // &
\end{array}$$

$a^3+9a-10 = (a-1)(a^2+a+10)$ Soluzioni: $\boxed{a=1}$, più le soluzioni di $a^2+a+10=0$ $\Delta = 1-40<0 \Rightarrow$ Nessun'altra soluzione.

— o — o —

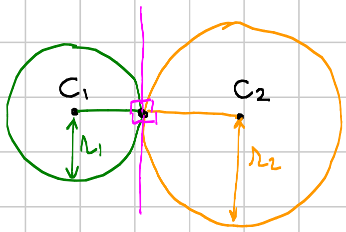
<u>Es. 8</u> Circonf. $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2-2x-a=0$ sono tangenti

<u>1° modo</u> Metto a sistema e impongo soluz. unica

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x-a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ \cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-2x-a=0 \end{cases}$$ sostituisco nella 2ª

$2x = 1-a$

<u>2° modo</u>



Dist $(C_1,C_2) = r_1+r_2$

Funziona solo se le 2 circ. sono tang. esternamente

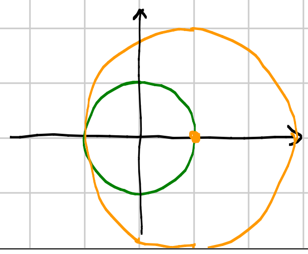
$x^2+y^2=1 \rightarrow$ centro $(0,0)$ e raggio 1

$x^2+y^2-2x-a=0 \rightarrow x^2-2x\boxed{+1}+y^2-a=\boxed{1} \rightarrow (x-1)^2+y^2=a+1$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$x_0=1,\ y_0=0,\ R=\sqrt{a+1} \rightarrow$ centro $(1,0)$ e raggio $\sqrt{a+1}$

Le 2 circonferenze sono tangenti se e solo se il raggio della seconda è 2, cioè se $\sqrt{a+1}=2 \Rightarrow a+1=4 \Rightarrow a=3$



Cosa non andava nel 1° modo?

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x-a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ \cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-2x-a=0 \end{cases}$$ sostituisco nella 2ª

$2x = 1-a$ $\longrightarrow$ Fin qui ho trovato che esiste un unico valore della x. Quali sono i valori di y corrispondenti?

Riuso la 1ª eq.

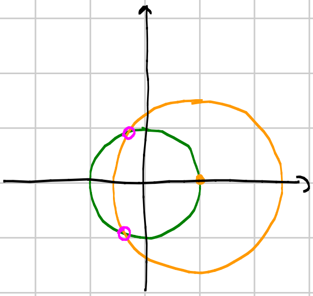
$x^2+y^2=1$ sost. $x=\frac{1-a}{2}$ $\quad \left(\frac{1-a}{2}\right)^2+y^2=1$ cioè

$y^2=1-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$ Questa ha soluz. unica $\Leftrightarrow$ il termine a dx è $=0$

$1-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1-a}{2}\right)^2=1 \longrightarrow \frac{1-a}{2}=1 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$\searrow \frac{1-a}{2}=-1 \Rightarrow \boxed{a=3}$ TROVATO PRIMA

Perché $a=-1$ non è accettabile? Perché il raggio sarebbe $\sqrt{a+1}=0$



Per valori abbastanza piccoli del raggio (dunque di a) le 2 circonferenze si intersecano in 2 p.ti che hanno la stessa x (e per questo x era univoc. det.) e le 2 y una opposta dell'altra (che derivava dall'imporre $y^2=\dots$)

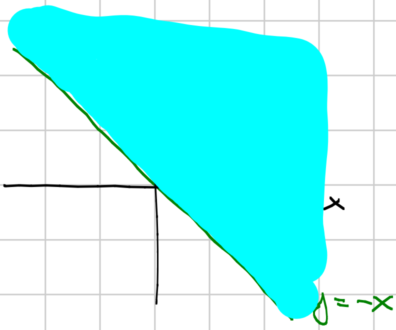
— o — o —

INSIEMI DEL PIANO

<u>Es. 1</u> Disegnare l'insieme dei punti (x,y) del piano t.c. $x+y\geq 0$

Più precisamente

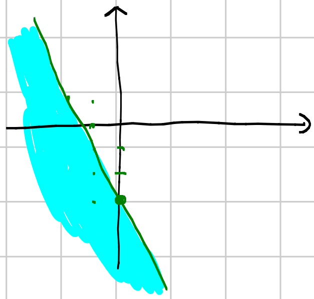
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 0\}$$



$x+y\geq 0$ vuol dire

$y\geq -x$ "sopra la retta $y=-x$"

Es. 2 Insieme $2x+y+3 \leq 0$; $y \leq -2x-3$
"Sotto la retta $y=-2x-3$"



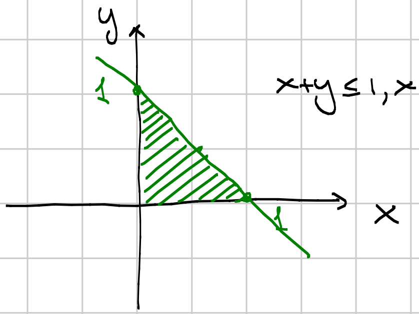
— o — o —

Es. 3 $x+y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Sono date 3 condizioni che devono essere vere contemporaneamente

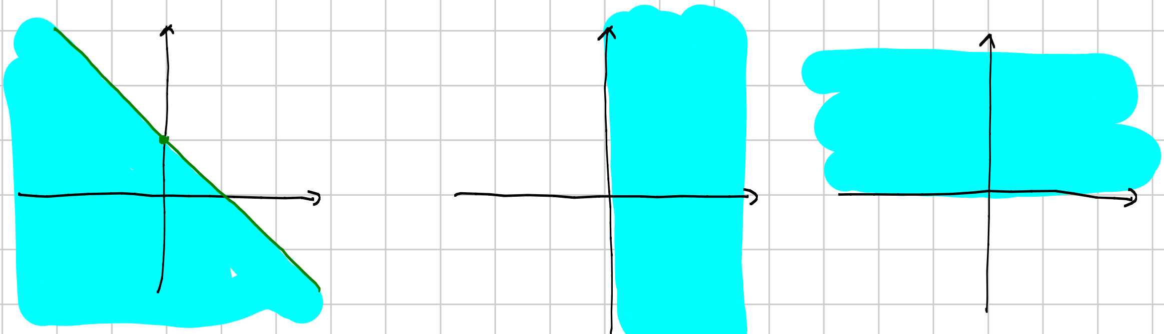
$x \geq 0$: 1° e 4° quadrante
$y \geq 0$: 1° e 2° quadrante

$x \geq 0$, $y \geq 0$: solo 1° quadrante



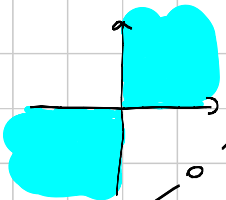
$x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$

$x+y \leq 1 \iff y \leq 1-x$
"sotto la retta $y = 1-x$"



$x+y \leq 1$ $\qquad$ $x \geq 0$ $\qquad$ $y \geq 0$

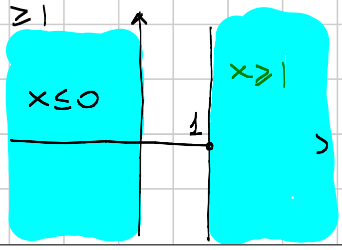
Es. 4 $xy \geq 0$ → x e y entrambi positivi → 1° quadrante
↘ x e y entrambi negativi → 3° quadrante



— o — o — o —

Es. 5 Determinare i p.ti (x,y) del piano t.c.
$x^2 - x \geq 0$ $\qquad$ $x(x-1) \geq 0$

VALORI ESTERNI: $x \leq 0$, $x \geq 1$



Tutti i p.ti con $x \leq 0$ sono ok
" " " " $x \geq 1$ sono ok
INDIPENDENTEMENTE DAL VALORE DI y

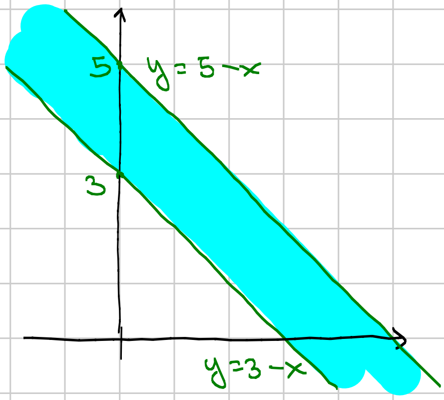
INSIEMI DEL PIANO

Titolo nota 25/09/2008

Es. 1 $3 \le x+y \le 5$. Sono 2 condizioni che devono essere verificate contemporaneamente

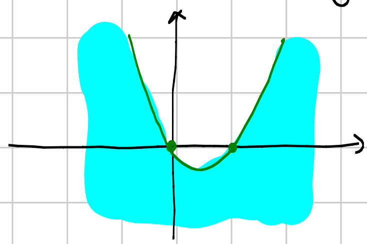
$x+y \ge 3 \iff y \ge 3-x$ "sopra la retta $y = 3-x$"

$x+y \le 5 \iff y \le 5-x$ "sotto la retta $y = 5-x$"



Es. 2 $y \le x^2-x$

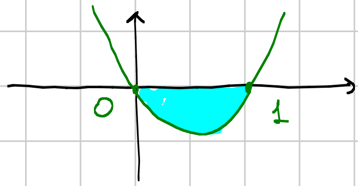
"sotto la parabola $y = x^2-x$"



Es. 3 $x^2-x \le y \le 0$ Le 2 condizioni devono valere contemporaneamente

$y \le 0$ "sotto l'asse x"

$y \ge x^2-x$ "sopra la parabola"



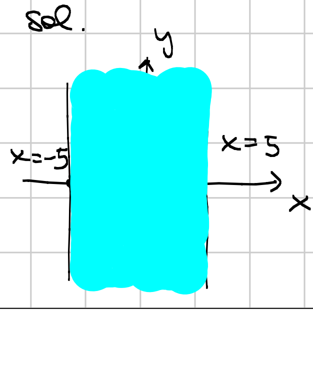
Es. 4 $|x| \le 5$ vuol dire $-5 \le x \le 5$

(in generale la disequazione $|x| \le A$ ← dato ha come sol:

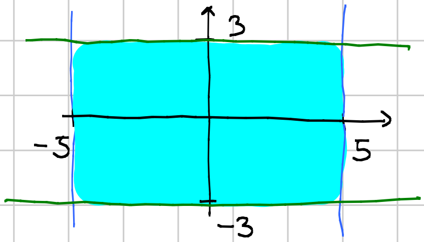
- $\emptyset$ se $A<0$
- $x=0$ se $A=0$
- $-A \le x \le A$ se $A>0$.

Similmente la diseq. $|x| \ge A$ ha come sol.

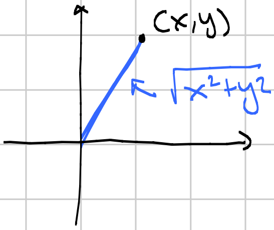
- tutto $\mathbb{R}$ se $A \le 0$
- $x \le -A$ e $x \ge A$ se $A>0$)



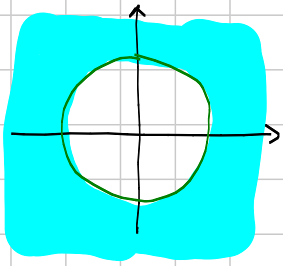
Es. 5 $\quad \underbrace{|x| \le 5}_{-5 \le x \le 5,} \qquad \underbrace{|y| \le 3}_{-3 \le y \le 3}$



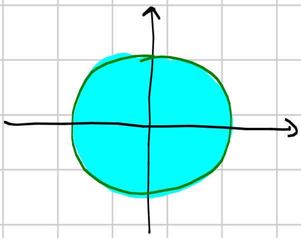
Es. 8 $\quad x^2+y^2 \ge 8$



x^2+y^2 è la distanza (al quadrato) di (x,y) dall'origine.
I p.ti (x,y) con $x^2+y^2 \ge 8$ sono i p.ti del piano con distanza dall'origine $\ge \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Quindi sono i p.ti esterni alla circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $2\sqrt{2}$



$x^2+y^2 \ge 8$



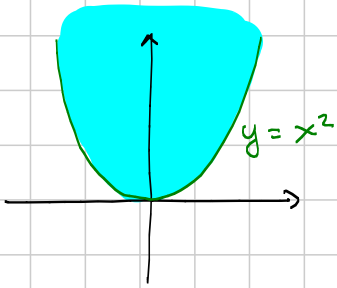
$x^2+y^2 \le 8$

— o —

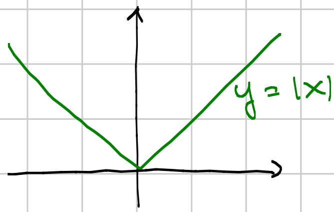
Es. 9 $\quad y - x^2 \ge 0$

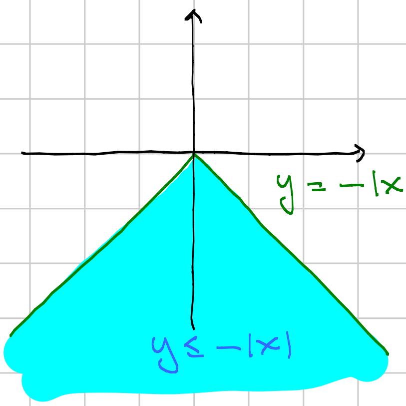
$y \ge x^2$

"Sopra la parabola"



Es. 10 $\quad y + |x| \le 0 \qquad y \le -|x|$



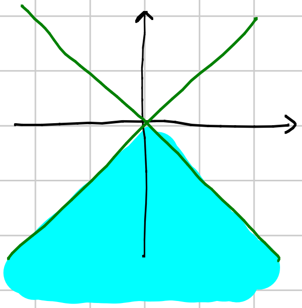


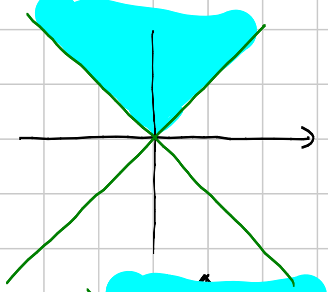
$y = -|x| \to \begin{cases} -x & \text{se } x \ge 0 \\ x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$

Es. 10 $x^2-y^2\le 0$ $(x-y)(x+y)\le 0$

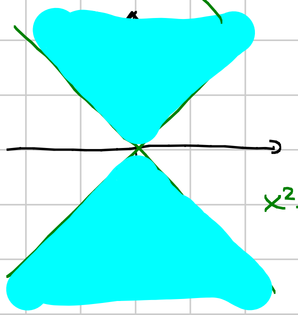
Ci sono 2 casi

$\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\le 0\end{cases}$ $\begin{cases} y\le x \\ y\le -x\end{cases}$ UNIONE $\begin{cases} x-y\le 0 \\ x+y\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases} y\ge x \\ y\ge -x\end{cases}$





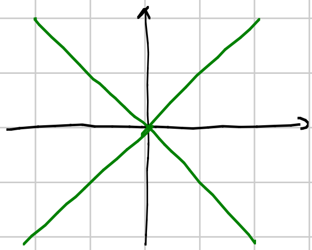
Facendo l'unione dei 2 casi ottengo



$x^2-y^2\le 0$

Metodo "rapido": $x^2-y^2\le 0$

$x^2-y^2=0$; $y^2=x^2$; $y=\pm x$

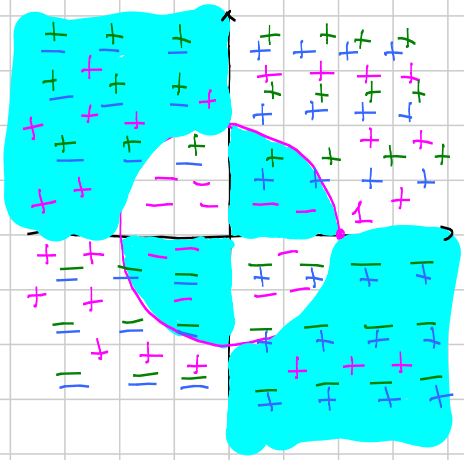


Es. 11 $xy(x^2+y^2-1)\le 0$

Prodotto di 3 fattori: 8 casi

PPP	$\boxed{\text{PPN}}$	$\boxed{\text{PNP}}$	$\boxed{\text{NPP}}$
NNP	NPN	PNN	$\boxed{\text{NNN}}$

Dovrei fare l'unione di 4 casi (esercizio)



1° FATTORE, cioè x

2° FATTORE, cioè y

3° FATTORE, cioè x^2+y^2-1. Cerco di capire dove è >0 e dove è <0:

$x^2+y^2-1>0 \iff x^2+y^2>1$

FUORI DALLA CIRC.

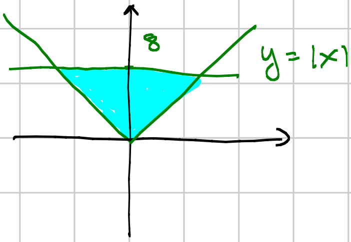
$x^2+y^2-1<0$ DENTRO LA CIRC.

Es. 12 $|x| \leq y \leq 8$

Due condizioni

$y \geq |x|$ "sopra il grafico di $|x|$"

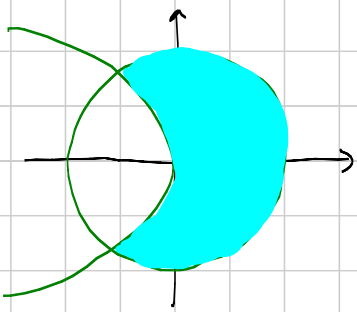
$y \leq 8$ "sotto la retta $y = 8$"

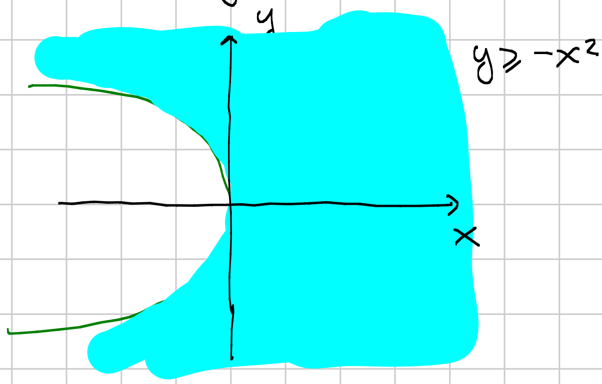


Es. 13 $\underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{\text{DENTRO IL CERCHIO}}, \quad \underbrace{x+y^2 \geq 0}_{x \geq -y^2}$

Due condizioni vere contemporaneamente

$x = -y^2$ è una parabola con asse lungo asse x





— o — o —

$\boxed{\text{TEST 2006/2007}}$

$\boxed{1}$ $\log_3 8 - \log_3 7 = \log_3 \frac{8}{7}$ $\quad \left[\log \frac{a}{b} = \log a - \log b\right]$

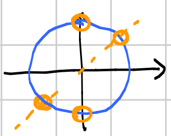
$\boxed{2}$ Risolvere $2\sin^2 x + \sin(2x) = 2$ in $[0, 2\pi]$

$\sin(2x) = 2 - 2\sin^2 x$

$2 \sin x \cdot \cos x = 2(1-\sin^2 x)$

$\cancel{2} \sin x \cos x = \cancel{2} \cos^2 x$

$\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$ $\qquad \cos x \, (\cos x - \sin x) = 0$ $\nearrow \cos x = 0$ $\searrow \cos x = \sin x$ cioè $\tan x = 1$



4 soluzioni:

$\frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{2}$

$\boxed{4}$ Se $a = \frac{1}{2}$ e $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{7}$, quanto vale b?

2^a eq.: $7a = a+b \Rightarrow b = 6a = 3$

$\boxed{5}$ $9^{x+9} = 3^{x+3}$; $(3^2)^{x+9} = 3^{x+3}$; $3^{\boxed{2x+18}} = 3^{\boxed{x+3}}$

$2x+18 = x+3 \Rightarrow x = -15$

$\boxed{6}$ $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = a\,\frac{b+c}{bc} = \frac{a(b+c)}{bc}$

$\boxed{7}$ $\underbrace{(x+1)}_{\boxed{x=-1}}\underbrace{(x^2+4)}_{\text{NULLA}}\underbrace{(x^3+3)}_{x^3=-3 \to \boxed{x=-\sqrt[3]{3}}} = 0$

$\boxed{7\text{bis}}$ $\underbrace{(x-1)}_{\boxed{x=1}}\underbrace{(x^2-4)}_{\boxed{x=\pm 2}}\underbrace{(x^3-3)}_{x^3=3,\ \boxed{x=\sqrt[3]{3}}} = 0$ 4 soluzioni

$\boxed{7\text{ter}}$ $\underbrace{(x^2-2)}_{\boxed{x=\pm\sqrt{2}}}\underbrace{(x^3-3)}_{\boxed{x=\sqrt[3]{3}}}\underbrace{(x^4-4)}_{x^4=4} = 0$

$x^4 = 4 \nearrow x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$ GIÀ PRESE

$x^4 = 4 \searrow x^2 = -2 \to$ Nulla

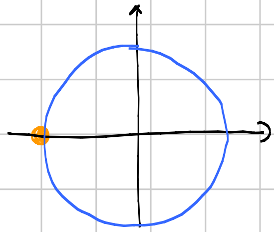
3 soluzioni !!!

$\boxed{8}$ x^5+5x^2+1 diviso x^2-1

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^5 & & +5x^2 & +1 & x^2-1 \\
-x^5 & +x^3 & & & x^3+x+5 \\
\hline
// & x^3 & +5x^2 & +1 & \\
 & -x^3 & & +x & \\
\hline
 & // & 5x^2 & +x+1 & \\
 & & -5x^2 & +5 & \\
\hline
 & & // & x+6 &
\end{array}
$$

$\boxed{9}$ $540°$ individua lo stesso P sulla circ. di

$0°$ $40°$ $90°$ $-90°$ $\boxed{-180°}$



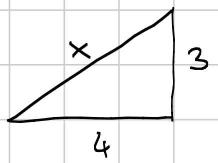
$540° = 360° + 180°$

GEOMETRIA PIANA / SOLIDA

Titolo nota 26/09/2008

Es. 1 Triangolo rettangolo 2 lati sono lunghi 3 e 4. Terzo lato?

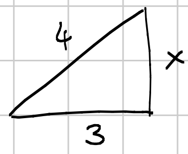
1° caso



$x^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$x = 5$

2° caso

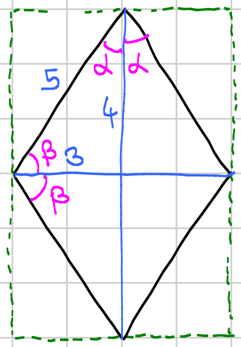


$x^2 = 4^2 - 3^2 = 7$

$x = \sqrt{7}$

Es. 2 Rombo con diagonali 6 e 8. Perimetro?

$5 \cdot 4 = 20$ = perimetro



Area rombo = metà area rettangolo

$= \frac{1}{2}$ diag. diag. $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

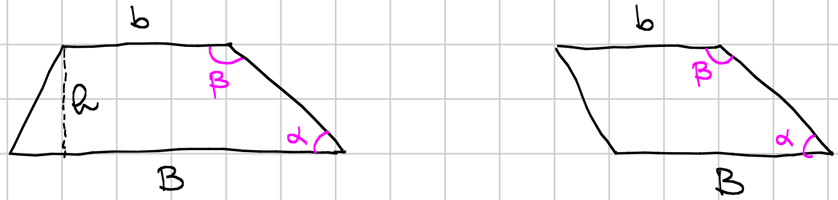
ROMBO = quadrilatero con LATI di uguale lunghezza

Proprietà del rombo:
1. le diagonali sono perpendicolari e si dimezzano a 2 a 2.
2. i lati sono a 2 a 2 paralleli
3. Gli angoli sono a 2 a 2 uguali
4. La somma dei 2 angoli adiacenti ad un lato è 180°

QUADRILATERI → qualunque
QUADRILATERI → trapezi
QUADRILATERI → parallelogrammi → qualunque
parallelogrammi → rombi
parallelogrammi → rettangoli

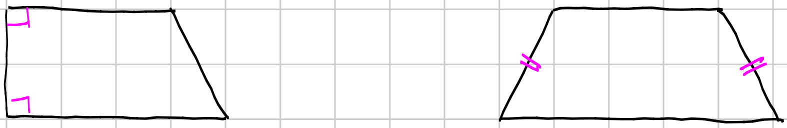
quadrati

TRAPEZIO: quadrilatero con 2 lati paralleli



$\alpha+\beta = 180°$

Area trapezio: $\frac{1}{2}(B+b)\cdot h$



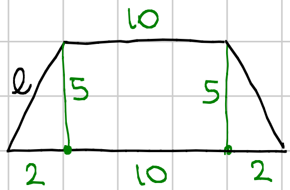
trapezio rettangolo   trapezio isoscele

ES. 3 In un trapezio isoscele $b=10$ $B=14$ $h=5$.
Perimetro?

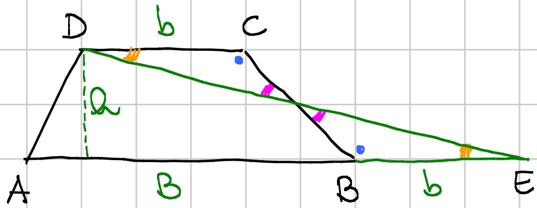
$l^2 = 25+4 = 29$

$l = \sqrt{29}$

Perim $= 10+14+2\sqrt{29}$



— o — o —



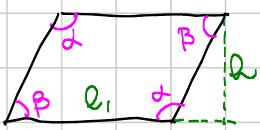
I 2 triangolini hanno gli stessi angoli ed un lato corrispondente di lungh. uguale
$\Rightarrow$ sono uguali
$\Rightarrow$ stessa area

$\Rightarrow$ Area (ABCD) = Area (AED) $= \frac{1}{2}(B+b)\cdot h$

— o — o —

PARALLELOGRAMMO: quadrilatero con i lati a 2 a 2 paralleli.

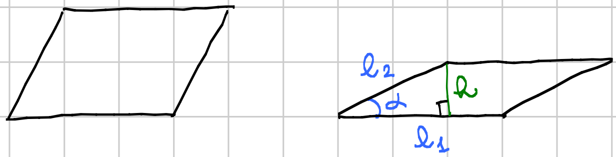
N.B. Un parallelogrammo è un trapezio



$\alpha+\beta = 180°$

1. I lati sono a 2 a 2 uguali
2. Le diagonali si dimezzano a 2 a 2
3. Area $= l_1 \cdot h$ (si smonta e si ricompone in un rettangolo)

Note le lungh. dei 2 lati di un parall., posso calcolare l'area?



Hanno lati della stessa lungh., ma area diversa.

Se conosco anche α, allora area $= l_1 \cdot h = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\alpha$

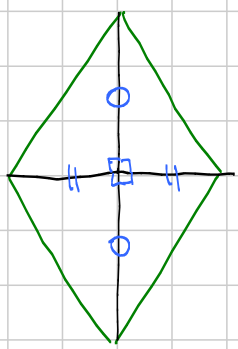
L'area è tanto maggiore, quanto maggiore è l'angolo α (massima quando $\alpha = 90°$)

— o — o —

ROMBO = quadrilatero con lati tutti uguali

NB. Un rombo è un parallelogramma.

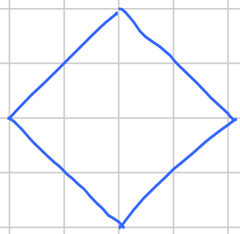
Un parallelogramma con le diagonali $\perp$ è un rombo. Infatti, essendo un parall., le sue diagonali si dimezzano a 2 a 2



I 4 triangoli rettangoli sono uguali $\Rightarrow$ lati uguali

RETTANGOLO = quadrilatero con 4 angoli retti

QUADRATO = rombo + rettangolo



Quadrato

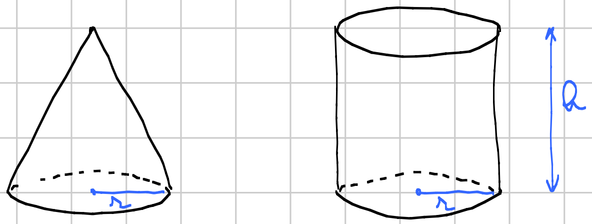
Trapezio

Rombo

Parallelogramma

Rettangolo

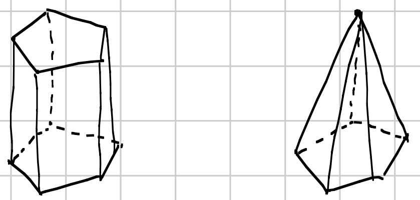
Un cono ed un cilindro hanno stessa base e stessa altezza.
Rapporto volumi ?



Volume cilindro $= \underbrace{\pi r^2}_{\text{Area base}} \cdot h$

Volume cono $= \frac{1}{3} \overbrace{\pi r^2}^{\text{Area base}} \cdot h$

Sup. laterale cilindro $= 2\pi r \cdot h$ (svolgendolo diventa un rettangolo)

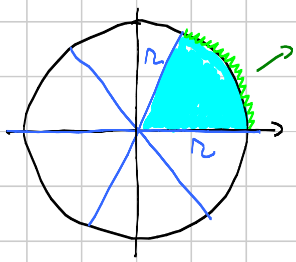


PRISMA PIRAMIDE

Volume prisma = Area base · alt.
" piramide $= \frac{1}{3}$ Area base · alt.

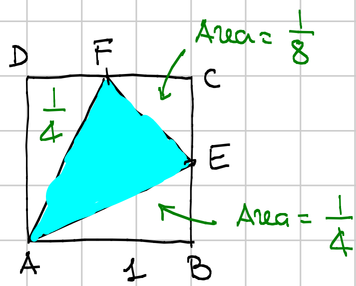
Sup. laterale prisma = altezza · perimetro base

Es.... Torta circolare divisa in 6 parti uguali.
Perimetro di ogni parte (raggio = 30)



$\frac{1}{6}$ lungh. circ. $= \frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{3} r$

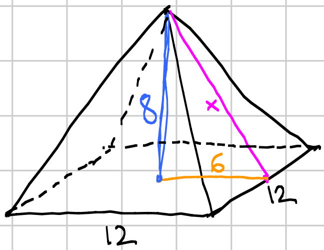
Perimetro fetta $= 2r + \frac{\pi}{3} r = \left(2 + \frac{\pi}{3}\right) r$



Es... Si possono calcolare le lungh. dei lati e dell'altezza, ma è + comodo ragionare per diff.

$\text{Area (AEF)} = \underset{\uparrow\ \text{Area quadrato}}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

Es....



Altezza = 8. Sup. laterale = ?

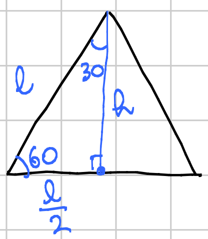
Serve l'area dei triangoli che formano la sup. laterale. Serve l'altezza di questi triangoli

$x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow x = 10$

Sup. laterale = 4 Area triangolo $= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 240$.

Es.... Un quadrato di lato l_Q ha la stessa area di un triangolo equilatero di lato l_T. Calcolare $\frac{l_T}{l_Q}$

Area quadrato $= l_Q^2$ Area triangolo equil. $= \frac{\sqrt{3}}{4} l_T^2$



$h = l \cdot \sin 60° = l \frac{\sqrt{3}}{2}$

oppure h si calcola con Pitagora

Area $= \frac{1}{2}$ base . altezza

$= \frac{1}{2} l \cdot l \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$

Uguagliando le 2 aree: $l_Q^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_T^2$

$$\left[\frac{l_T}{l_Q}\right]^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{l_T}{l_Q} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}.$$

— o — o —

Es.... Cocomero con diametro esterno 40 cm e buccia di 4 cm.

Volume sfera $= \frac{4}{3}\pi R^3$ [Sup. laterale sfera: $4\pi R^2$]

Volume cocomero $= \frac{4}{3}\pi\, 20^3$ Raggio cocomero

Volume parte edibile $= \frac{4}{3}\pi\, 16^3$ Raggio parte buona

$$\text{Percentuale buona} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi}\, 16^3}{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi}\, 20^3} = \frac{16^3}{20^3} = \left(\frac{16}{20}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

$\frac{64}{125}$ è poco più di $\frac{64}{128} = \frac{1}{2}$ Parte buona = pochissimo + di $\frac{1}{2}$.

TEST 2007/2008

Titolo nota 26/09/2008

[1] $\dfrac{10^{200}}{20} = \dfrac{2^{200}\cdot 5^{200}}{2^2\cdot 5} = 2^{198}\cdot 5^{199} = 5\cdot 10^{198}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$ NO!!!!!

[2] $\log_2(x\cdot 2^x) = \log_2 x + \log_2 2^x = x + \log_2 x$

[3] "Tutti gli studenti di Meccanica che hanno fatto precorso supereranno il test". Supponendo che l'ha detto abbia ragione, quale delle seguenti è $\boxed{\text{sicuramente}}$ vera?

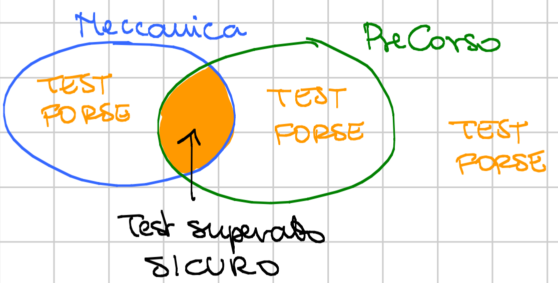
(A) Tutti quelli che superano Test sono di Mecc. e hanno fatto PCM

(B) Non superare il test vuol dire non aver seguito PCM

(C) Tutti quelli di Mec. che superano Test hanno fatto PCM

(D) Tutti quelli che non superano non sono di Mecc.

(E) Tutti quelli di Mec. che NON superano non hanno fatto PCM



[4] $x^2-6x+9>0$ $(x-3)^2>0$ sempre, tranne quando $x-3=0$

$\boxed{x\neq 3}$

[4bis] $(x^2-3)^2>0$ sempre tranne quando $x^2=3$, $\boxed{x\neq \pm\sqrt{3}}$

[5] $4\sin^4 x + \sin^2(2x) = 4\sin^4 x + (2\sin x\cos x)^2$

$= 4\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x$

$= 4\sin^4 x + 4\sin^2 x(1-\sin^2 x)$

$= \cancel{4\sin^4 x} + 4\sin^2 x - \cancel{4\sin^4 x}$

$= 4\sin^2 x$

$\boxed{6}$ $$\frac{x^6-1}{x^2-1} - \frac{x^8-1}{x^4-1} = (\cancel{x^4}+x^2+\cancel{1}) - (\cancel{x^4}+\cancel{1}) = x^2$$

$x^8-1 = (x^4+1)(x^4-1)$; $x^6-1 = (x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$ $A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

$\boxed{7}$ $a=2$ $\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. Determinare $\frac{1}{a+b}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{1}{2} \Rightarrow b=2 \Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{8}$ Dividere x^4+x^3+1 per x^2+3. Resto $=$?

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+3 \\
-x^4 & & -3x^2 & & & x^2+x-3 \\ \hline
// & x^3 & -3x^2 & & +1 & \\
& -x^3 & & -3x & & \\ \hline
& // & -3x^2 & -3x & +1 & \\
& & +3x^2 & & +9 & \\ \hline
& & & \boxed{-3x} & \boxed{+10} &
\end{array}$$

$\boxed{9}$ Quante soluzioni ha $\underbrace{(x+1)}_{\boxed{x=-1}}\underbrace{(x^2+2)}_{\text{NULLA}}\underbrace{(x^3+3)}_{x^3=-3}=0$.

2 soluzioni $\boxed{x=-\sqrt[3]{3}}$

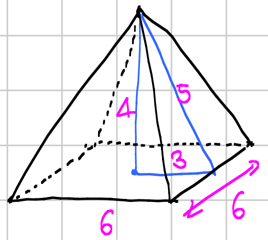
$\boxed{10}$ Dopo 3 compitini uno studente ha media $=24$.
Quanto deve prendere all'ultimo per portare la media a 25?

NEMMENO PENSARE CHE SIA 26 !!!

$$\frac{A+B+C}{3}=24 \qquad \frac{A+B+C+D}{4}=25 \qquad D=28$$

$$A+B+C=72 \qquad A+B+C+D=100 \qquad 72+D=100$$

$\boxed{11}$ Piramide a base quadrata. Area base $=36$, Volume $=48$
Sup. laterale $=$?



Vol = $\frac{1}{3}$ Area base $\cdot$ h

$\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{36}^{12} \cdot h = 48 \Rightarrow h = 4$

Altezza faccia = 5

Area faccia = $\frac{1}{2}$ base $\cdot$ altezza = $\frac{1}{2}\, 6 \cdot 5 = 15$

Sup. laterale = $4 \cdot 15 = 60$

— o —

$\boxed{12}$ Cerchio. Lungh. circ. = p. Area = ?

Sia r il raggio. $p = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{2\pi}$

$$\text{Area} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \pi\,\frac{p^2}{4\pi^2} = \boxed{\frac{p^2}{4\pi}}$$

$\boxed{13}$ $y = 3x - 2$ $\qquad ax + 5y + 7 = 0$. Per quale a sono $\perp$?

$5y = -ax - 7$

$y = \boxed{-\frac{a}{5}}\,x - \frac{7}{5}$

coeff. ang. deve essere $-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{a}{5} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{5}{3}$

$\boxed{14}$ $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

$x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$

$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 16 + 9$

Centro: $(-4, 3)$ $\qquad (x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

Raggio: 5 $\qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

In alternativa si potevano usare le formule

$x_0 = -\frac{a}{2} = -\frac{8}{2} = -4$; $y_0 = -\frac{b}{2} = 3$; $R^2 = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$

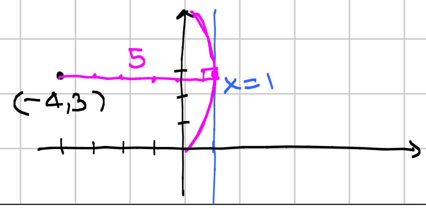
$= -0 + 16 + 9 = 25$

Passa per l'origine? Sostituisco $(0,0)$

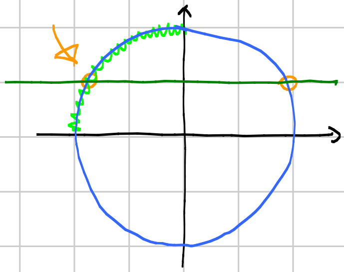
Passa per $(-1,-1)$? Sostituisco $(-1,-1)$: $1 + 1 - 8 + 6 = 0$ SI!

(In alternativa: calcolare la distanza di $(-1,-1)$ dal centro)

E' tangente alla retta $x = 1$?



$\boxed{15}$ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{1}{2}$. Quanto vale $\cos x$?



$x = \frac{5\pi}{6}$ $150°$

$\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{15 \text{ bis}}$ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{1}{3}$. Quanto vale $\cos x$? $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\frac{1}{9} + \cos^2 x = 1$; $\cos^2 x = \frac{8}{9}$; $\cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

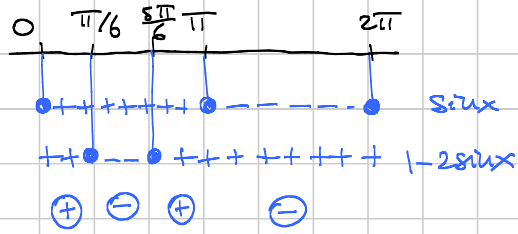
scegliere !

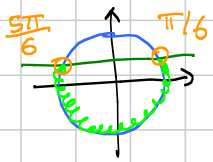
$\cos x = \boxed{\pm}\, \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Tra $\frac{\pi}{2}$ e π $\cos x < 0$ quindi $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{16}$ $\frac{1}{\sin x} < 2 \iff \frac{1}{\sin x} - 2 < 0 \iff \frac{1 - 2\sin x}{\sin x} < 0$

$1 - 2\sin x > 0 \iff 2\sin x < 1$

$\iff \sin x < \frac{1}{2}$





$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup (\pi, 2\pi)$

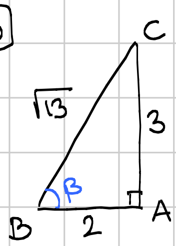
$\boxed{17}$ $-x^2 \geq 3x$; $x^2 + 3x \leq 0$; $x(x+3) \leq 0$ Radici $x=0$, $x=-3$

VALORI INTERNI : $[-3, 0]$

$\boxed{18}$ $4 \cdot 2^x \geq 8^{2x-3}$ $2^2 \cdot 2^x \geq (2^3)^{2x-3}$; $2^{2+x} \geq 2^{6x-9}$

$2 + x \geq 6x - 9$; $5x \leq 11$ $\Rightarrow$ $x \leq 11/5$

$\boxed{19}$



$\cos\beta = ?$

$BC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$AB = BC \cdot \cos\beta$

$\cos\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\boxed{20}$ $x = \sqrt[7]{3^{20}}$; $x^7 = 3^{20}$ $\boxed{x = 3^{\frac{20}{7}}}$

$\sqrt[20]{x} = 3^{1/7} = \sqrt[7]{3}$, $\log_3 x = \frac{20}{7}$

$x = 3^{\frac{20}{7}} < 3^{\frac{21}{7}} = 3^3 = 27$