

Corso di Analisi Matematica 2 – Informazioni

Capi Gli studenti sono invitati a nominare subito due *capicorso*, che dovranno fungere da tramite tra il docente e gli altri studenti. Non si tratta di un compito particolarmente oneroso, ma molto importante nell'economia del corso.

Ricevimento studenti L'orario di ricevimento *ordinario* verrà comunicato appena possibile all'inizio di ciascun semestre e sarà valido per le 13 settimane di corso contenute in quel semestre.

Eventuali ricevimenti *straordinari* (durante e dopo il corso) potranno essere concordati su appuntamento.

Esami Gli esami verranno effettuati secondo le modalità spiegate dettagliatamente a parte. *Si raccomanda di non fidarsi di nessuna informazione relativa alle date d'esame (anche se proveniente da fonti ufficiali) se non confermata dal docente, direttamente o tramite la pagina web.* Si raccomanda di prenotarsi agli esami mediante l'apposito sito <http://esami.unipi.it>, che permette anche di essere informati di eventuali variazioni.

Correzione compiti Durante le 13 + 13 settimane del corso è possibile consegnare al docente lo svolgimento scritto di esercizi. Se gli elaborati saranno preparati con cura (scrittura leggibile, argomentazioni spiegate bene, un solo esercizio per pagina) verranno corretti (come se si trattasse di un compito d'esame vero e proprio) in un tempo ragionevole e restituiti all'autore. Questa attività permette di avere una valutazione ufficiosa della propria preparazione molto prima che inizi il periodo degli esami.

Ovviamente successi e insuccessi in queste prove non influiranno sul voto finale, il quale dipenderà esclusivamente dalle prove d'esame.

Propedeuticità Apparentemente nessuna regola scritta impedisce di sostenere l'esame di Analisi Matematica 2 prima di aver superato con successo, o anche solo seguito, l'esame di Analisi Matematica 1. In questi casi è quindi fondamentale affidarsi al buon senso: è praticamente impossibile, anzi controproducente, seguire con profitto il corso se si hanno buchi o incertezze nei preliminari (precorso, analisi 1, algebra lineare). Per questo si raccomanda a chi ha problemi di questo tipo di porvi rimedio quanto prima. Detto questo, qualunque cittadino può seguire liberamente il corso.

Forum studenti Dalla pagina web del docente (facilmente raggiungibile cercando "Massimo Gobbino" con qualunque motore di ricerca) si accede ad un Forum destinato a chi segue questo corso e non solo. Quello è il luogo in cui porre tutte le domande, sia su questioni burocratiche sia su questioni matematiche, la cui risposta può interessare più di una persona. Tutti gli studenti sono invitati a registrarsi ed a seguire regolarmente ed attivamente il Forum. Essere attivi vuol dire anche provare a rispondere alle domande che altri pongono, superando la paura di "sparare stupidaggini". A tutti, in particolare a chi sta imparando qualcosa di nuovo, capita di sparare stupidaggini: si tratta solo di decidere se farlo subito o aspettare il giorno dell'esame . . . Sembrerà strano, ma molti preferiscono la seconda . . .

E-mail Per le questioni generali di cui al punto precedente si raccomanda di *evitare l'uso dell'e-mail*, alla quale probabilmente non si riceverà risposta, un po' perché ormai le e-mail arrivano a centinaia ogni giorno, un po' perché è davvero inutile spiegare 10 volte separatamente a 10 persone diverse la stessa cosa, quando si potrebbe spiegarla una volta per tutte sul Forum. E soprattutto, prima di scrivere una qualunque e-mail, conviene sempre dare uno sguardo qui: <http://phdcomics.com/comics/archive.php?comid=1795>

Materiale didattico pensato per il corso Nei limiti del possibile i *video delle lezioni* ed i file pdf con lo *stampato integrale di quanto scritto a lezione* saranno resi disponibili dalla pagina web del docente. Questo rende meno pressante la necessità di essere presenti fisicamente a lezione.

Nei limiti del possibile, durante il corso potrebbe formarsi pian piano una raccolta di esercizi, anche questa scaricabile dalla pagina web del docente.

Libri di testo Gli argomenti del corso riguardano conoscenze matematiche stabilizzate da secoli. Per questo motivo qualunque libro sul quale ci si trovi bene è adeguato, ed in tal senso fare un salto in biblioteca potrebbe essere utile. È comunque estremamente importante affiancare allo studio della teoria lo svolgimento di un numero congruo di esercizi. Per questi si consigliano

[1] M. Ghisi, M. Gobbino; *Esercizi di Analisi Matematica II (Parte A)*; Esculapio.

Esercizi standard sul calcolo differenziale e integrale in più variabili. La versione aggiornata è quella 2014/15 (l'indicazione "Parte A" dovrebbe prima o poi sparire dal titolo).

[2] M. Ghisi, S. Spagnolo; *Prove di Analisi Matematica II*; Esculapio.

Testi d'esame su tutto il programma, da usare solo al termine della preparazione e dopo aver acquisito sicurezza sulle tecniche standard.

Testi consigliati Fermo restando che, come già detto, qualunque testo sul quale ci si trovi bene (compresi eventualmente gli stampati delle lezioni) è adeguato, si segnalano anche i seguenti libri.

[3] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone; *Analisi Matematica due*; Liguori Editore.

Testo standard di teoria (da non confondersi con la versione edulcorata per ingegneria degli stessi autori, che si intitola *Elementi di Analisi Matematica due*).

[4] E. Giusti; *Analisi Matematica 2*; Bollati Boringhieri.

Testo standard di teoria. Un classico evergreen.

[5] M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa; *Analisi matematica 2*; Zanichelli.

Testo standard di teoria, piacevole dal punto di vista grafico e non solo. Ottimo per un corso di servizio rafforzato (vista anche l'attenzione alle applicazioni) o per una prima passata, ma per uno studio completo della materia necessita di qualche integrazione.

[6] E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo; *Problemi scelti di Analisi Matematica II*; Liguori Editore.

Questa è una raccolta di temi d'esame su tutto il programma (stesse raccomandazioni di [2]).

Pirateria È ben noto che alcune copisterie vendono versioni fotocopiate di questi (e di altri) testi. Certamente la qualità non è la stessa rispetto alle versioni ufficiali, anzi talvolta mancano delle pagine e le fotocopie si riferiscono a versioni vecchie di anni non più aggiornate. Ma, più importante, **si tratta di vendita illegale di materiale contraffatto, in barba a tutte le leggi che dovrebbero tutelare il lavoro di chi quel materiale lo ha prodotto.**

Corso di Analisi Matematica 2 – A.A. 2015/2016

Programma previsto per argomenti

Preliminari/Prerequisiti

- Tutto il precorso, in particolare saper disegnare insiemi del piano descritti mediante equazioni e/o disequazioni e saper risolvere sistemi di equazioni.
- Tutto il corso di Analisi Matematica 1 (studi di funzione, limiti, calcolo integrale, equazioni differenziali).
- Tutto il corso di Algebra Lineare (vettori, geometria analitica, applicazioni lineari, matrici, forme quadratiche).

Calcolo differenziale in più variabili

- Lo spazio \mathbb{R}^n . Vettori e operazioni tra vettori. Norma, distanza, prodotto scalare.
- Funzioni di più variabili e loro grafico. Visualizzazione del grafico per funzioni di due variabili: linee di livello e restrizione alle rette (o curve) passanti per un punto.
- Elementi di topologia in \mathbb{R}^n . Limiti e continuità per funzioni di più variabili. Relazione tra il limite ed il limite delle restrizioni.
- Limiti all'infinito per funzioni di più variabili.
- Derivate parziali e direzionali per una funzione di più variabili e loro significato geometrico.
- Differenziale per funzioni di più variabili e sua interpretazione geometrica in termini di (iper)piano tangente al grafico. Relazione tra le derivate direzionali e le derivate parziali per una funzione differenziabile. Gradiente e suo significato geometrico. Teorema del differenziale totale.
- Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor in due o più variabili, con resto di Peano e di Lagrange.
- Massimi e minimi locali e globali per funzioni di più variabili. Se in un punto di massimo o minimo interno una funzione è differenziabile, allora il suo gradiente si annulla.
- Richiami sulle forme quadratiche in più variabili: nozione di forma definita positiva e definita negativa. Criteri per stabilire la segnatura.
- Matrice Hessiana e comportamento locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario. Convessità e concavità in più variabili.

- Insieme compatti in \mathbb{R}^n . Teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili. Generalizzazioni del teorema di Weierstrass nel caso di insiemi non limitati.
- Massimi e minimi vincolati: metodo delle linee di livello.
- Massimi e minimi vincolati: metodo di parametrizzazione del vincolo.
- Massimi e minimi vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- Calcolo differenziale per funzioni da \mathbb{R}^n ad \mathbb{R}^m . Matrice Jacobiana.
- Derivazione di funzioni composte.

Calcolo integrale in più variabili

- Integrale di Riemann per funzioni di due o più variabili e suo significato geometrico/fisico in dimensione due/tre.
- Formula di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici mediante sezioni.
- Integrali tripli: formule di riduzione per sezioni e per colonne.
- Formula di riduzione per integrali in dimensione qualunque.
- Sfruttamento delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali multipli.
- Calcolo di aree, volumi, baricentri, momenti d'inerzia mediante integrali doppi e tripli.
- Coordinate polari nel piano. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo delle coordinate polari e sferiche per il calcolo di integrali multipli.
- Formula generale per il cambio di variabili negli integrali multipli.
- Solidi di rotazione. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.
- Integrali impropri in più variabili: definizioni e studio della convergenza.
- Integrali dipendenti da parametro: continuità e differenziabilità.

Curve, superfici, calcolo vettoriale

- Curve: definizione. Curve chiuse e semplici. Vettore, versore e retta tangente.
- Lunghezza di una curva: definizione e calcolo.
- Integrali curvilinei (integrale di una funzione lungo una curva).
- Forme differenziali.
- Integrale di una forma differenziale lungo una curva. Forme differenziali esatte e potenziali.

- Insiemi connessi, convessi, stellati, semplicemente connessi. Forme differenziali chiuse. Relazioni tra forme differenziali chiuse ed esatte.
- Superfici: definizioni, versore normale, piano tangente.
- Area di una superficie: definizione e calcolo.
- Teorema di Guldino per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.
- Integrali superficiali (integrale di una funzione su una superficie).
- Operatori differenziali: divergenza, rotore, Laplaciano, gradiente. Relazioni tra gli operatori differenziali.
- Orientazione di una superficie e del suo eventuale bordo.
- Formula di Gauss-Green (teorema della divergenza) ed applicazioni.
- Formula di Stokes (teorema del rotore) ed applicazioni.

Spazi metrici

- Distanze e spazi metrici. Nozione di convergenza e topologia in uno spazio metrico.
- Norme e spazi di Banach. Equivalenza di norme in dimensione finita.
- Prodotti scalari e spazi di Hilbert.
- Continuità e uniforme continuità in spazi metrici.
- Limitatezza e totale limitatezza. Caratterizzazione della compattezza in spazi metrici.
- Teorema delle contrazioni.
- Completezza, esistenza ed unicità del completamento, teorema di estensione per funzioni uniformemente continue.

Varietà

- Teorema delle funzioni implicite (in codimensione uno ed in codimensione arbitraria).
- Teorema della funzione inversa. Teorema della mappa aperta.
- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (in codimensione uno e codimensione arbitraria): dimostrazioni mediante esplicitazione del vincolo, teorema della mappa aperta, penalizzazione del vincolo.

Successioni e serie di funzioni

- Convergenza puntuale e uniforme. Interpretazione in termini di spazio metrico.
- Teoremi di scambio (del limite, della derivata, dell'integrale).
- Completezza dello spazio delle funzioni continue.
- Teoremi di convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia.
- Serie di funzioni e convergenza totale.
- Serie di potenze: raggio di convergenza, formula per determinarlo e comportamento negli estremi (teorema di Abel).
- Serie di Taylor e funzioni analitiche. Analiticità delle funzioni elementari. Tecniche per il calcolo della somma di alcune serie di potenze.
- Teorema di Ascoli-arzelà.

Equazioni differenziali

- Teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali (via punto fisso).
- Teorema di sola esistenza per equazioni differenziali (via problemi approssimanti).
- Studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale.
- Soprasoluzioni e sottosoluzioni.
- Metodi energetici per lo studio di equazioni differenziali del second'ordine.
- Sistemi di equazioni differenziali.
- Punti stazionari e studio della loro stabilità mediante linearizzazione.

Appendice di teoria della misura

- Sigma-algebra, misura su sigma-algebra, misura esterna, misura vettoriale.
- Insiemi misurabili alla Caratheodory.
- Costruzione di misure: metodo I e metodo II. Misura di Lebesgue e misure di Hausdorff.
- Misurabilità dei Boreliani ed additività della misura sui distanti. Esempio di Vitali.
- Funzioni misurabili. Definizione di integrale.
- Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: Beppo Levi, Fatou, convergenza dominata.
- Continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametro.