1. Consideriamo l'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1,\ x^2 + z^2 = 3\}$$

e la funzione

$$f(x, y, x) = z - x.$$

Determinare estremo inferiore e superiore di f in C precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo (determinando anche gli eventuali punti di minimo/massimo).

L'insieme C è chiuso e limitato (x e z sono limitati dalla 2ª equazione, e a quel p.to y è limitato dalla 1ª). Quindi C è compatto e dunque max/min esistono per Weierstrass.

Moltiplicatori di Lagrange. $\boxed{\text{Primo sistema}}$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 1 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

Dico che ha rango 2 su C.

Se avesse rango ≤ 1, allora $yz = 0$ (ultimo det)

- Se $z = 0$, allora $x^2 = 3$ e la 1ª equ. è impossibile.
- Se $y = 0$, allora $x^2 + z = 1$ e $x^2 + z^2 = 3$, da cui $z^2 - z - 2 = 0$, da cui $z = -1$ e $z = 2$. Troviamo così i p.ti $(\pm\sqrt{2}, 0, -1)$, che non annullano il det senza la 2ª colonna

$\boxed{\text{Secondo sistema}}$

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda x + 2\mu x \\ 0 = 2\lambda y \\ 1 = \lambda + 2\mu z \end{cases} \quad + \text{ vincoli}$$

Dalla 2ª equ. deduciamo che $\lambda = 0$ oppure $y = 0$.

Se $y = 0$, dai vincoli troviamo $(\pm\sqrt{2}, 0, -1)$ come nel 1° sistema

Se $\lambda = 0$, sostituendo troviamo $-1 = 2\mu x$ e $1 = 2\mu z$, da cui $\mu \neq 0$ e $x = -z$. Sostituendo nei vincoli troviamo

$x^2 = z^2 = \frac{3}{2}$ e $y^2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ (la scelta $z = \sqrt{\frac{3}{2}}$ non va bene).

Si ottengono così i p.ti

$$\left(+\sqrt{\frac{3}{2}},\ \pm\sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$ Sostituendo troviamo

p.to di max

$$(\sqrt{2}, 0, -1) \to -1 - \sqrt{2}$$

$$\boxed{(-\sqrt{2}, 0, -1)} \to \boxed{-1 + \sqrt{2}}$$ max

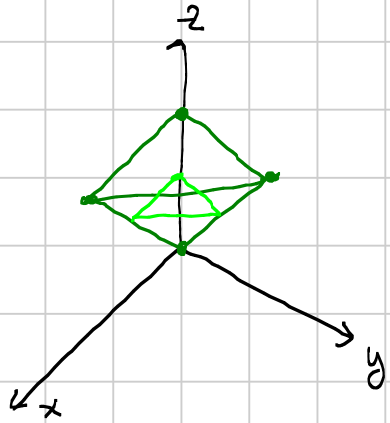
$$\boxed{\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \pm\sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \to \boxed{-\sqrt{6}}$$

↑ min

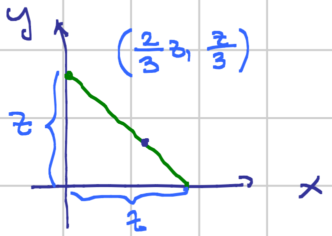
↑ 2 p.ti di min

2. Sia V il tetraedro con vertici nei punti $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$. Calcolare

$$\int_V |1-2z|\,dx\,dy\,dz.$$



Integriamo per sezioni. La sezione di V ad altezza z è il triangolo in figura



L'area della sezione è $\frac{1}{2}z^2$. Quindi

$$\int_V |1-2z|\,dz = \int_0^1 dz\, |1-2z| \cdot \text{Area (sezione)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2z)z^2\,dz + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 (2z-1)z^2\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (z^2-2z^3)\,dz - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 (z^2-2z^3)\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{24} - \frac{1}{32} + \frac{1}{24} - \frac{1}{32} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16} = \boxed{\frac{3}{32}}$$

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^2+n}. \quad f_n(x)$$

(a) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(-1, 1)$.

(b) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

Fissato $A \in (0,1)$ vale $\quad |f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{A^n}{n}$

da cui la convergenza puntuale e totale per l'M-test di Weierstrass. Essendo A arbitrario abbiamo la continuità in $(-1,1)$.

Per le derivate, osserviamo che

$$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}(x^2+n) - 2x \cdot x^n}{(x^2+n)^2} = \frac{(n-2)x^{n+1} + n^2 x^{n-1}}{(x^2+n)^2}$$

e quindi $\quad |f_n'(x)| \leq \frac{(n+2) A^{n+1} + n^2 A^{n-1}}{n^2} \quad \forall x \in [-A, A]$

da cui la convergenza uniforme della serie delle derivate per l'M-test e quindi $f \in C^1((-1,1))$ per l'arbitrarietà di A.

(b) Osserviamo che $f_n(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e quindi

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \text{da cui}$$

$$\liminf_{x\to 1^-} f(x) \geq \liminf_{x\to 1^-} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Facendo tendere $n \to +\infty$ otteniamo che $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty}$

Osserviamo anche che

$$\frac{x^n}{x^2+n} = \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^n}{x^2+n} - \frac{x^n}{n+1} = \frac{x^n}{n+1} + \boxed{\frac{x^n(1-x^2)}{(n+1)(x^2+n)}}$$

↑ converge tot. in $[-1,1]$ e quindi $\to 0$ per $x \to -1^+$ per teo. di scambio

da cui

$$\boxed{\lim_{x\to -1^+} f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \boxed{\log 2 - 1}$$

↑ teoria serie di potenze

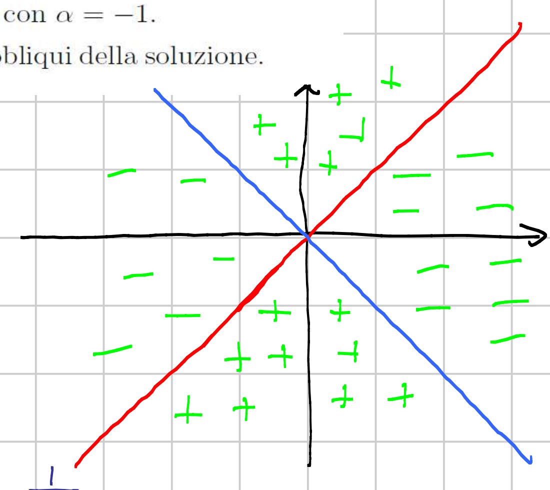
4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u+t)}{u-t}, \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Nel caso $\alpha = -1$ studiare l'esistenza globale nel passato e nel futuro, calcolando anche gli eventuali limiti della soluzione per $t \to \pm\infty$.

(b) Stabilire quale relazione sussiste tra la soluzione con $\alpha = 1$ e quella con $\alpha = -1$.

(c) (Bonus question) Nel caso $\alpha = -1$ determinare gli eventuali asintoti obliqui della soluzione.



(a) Esistenza loc. no pblm. Segni come in figura

- Per $t<0$ la soluzione "scende" restando nella zona $u(t)<t$. Non può toccare la retta $u=t$ perché dovrebbe farlo con derivata $+\infty$ (formalmente: $v(t) = t - \frac{1}{100}$ è sottosoluzione, quindi sta sopra per $t \leq 0$) e non può avere BU perché il RHS è limitato per $u < t - \frac{1}{100}$.
  Ne segue che la sol. esiste gl. nel passato e tende a $-\infty$.
- Per $t>0$ la soluzione sale fino ad incontrare la retta $u=-t$, poi decresce restando sempre nella zona $-t<u(t)<t$ (infatti $v(t)=-t$ è sottosoluzione). La soluzione tende a $-\infty$ perché se tendesse ad $l \in \mathbb{R}$ avremmo che $u'(t) \sim +\frac{\pi}{2}\frac{1}{l-t}$ e quindi $u(t)$ si comporterebbe come $-\log t$ il che contraddice il limite finito.

(b) Sia $u(t)$ la sol. con $u(0)=-1$ e $v(t)$ la sol. con $v(0)=1$. Allora $v(t) = -u(-t)$. Infatti

$$\dot v(t) = \dot u(-t) = \frac{\arctan(u(-t)+(-t))}{u(-t)-(-t)} = \frac{\arctan(v(t)+t)}{v(t)-t}$$

risolve la stessa equazione, solo con dato iniziale opposto.

(c) Per $t \to +\infty$ non c'è asintoto obliquo (infatti $u'(t) \to 0$, ma $u(t)$ non tende ad una costante.

Per $t \to -\infty$ l'asintoto obliquo è $t - \frac{\pi}{2}$. Infatti ponendo $w(t) = u(t) - t$ si ottiene che questa risolve

$$\dot w = \frac{\arctan(w+2t)}{w} - 1$$ e tutte le sol.

con $w(0)<0$ di questa tendono a $-\frac{\pi}{2}$ per $t \to -\infty$.