

Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 23 Febbraio 2019

1. Consideriamo l'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1, x^2 + z^2 = 3\}$$

e la funzione

$$f(x, y, z) = z - x.$$

Determinare estremo inferiore e superiore di f in C precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo (determinando anche gli eventuali punti di minimo/massimo).

2. Sia V il tetraedro con vertici nei punti $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.

Calcolare

$$\int_V |1 - 2z| \, dx \, dy \, dz.$$

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^2 + n}.$$

(a) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(-1, 1)$.

(b) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x).$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u+t)}{u-t}, \quad u(0) = \alpha.$$

- (a) Nel caso $\alpha = -1$ studiare l'esistenza globale nel passato e nel futuro, calcolando anche gli eventuali limiti della soluzione per $t \rightarrow \pm\infty$.
- (b) Stabilire quale relazione sussiste tra la soluzione con $\alpha = 1$ e quella con $\alpha = -1$.
- (c) (Bonus question) Nel caso $\alpha = -1$ determinare gli eventuali asintoti obliqui della soluzione.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.