Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 02 Febbraio 2019

1. Sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano $x = 0$, dal piano $x = 2$, e dalla superficie parametrizzata da
$$\Phi(u, v) = (v, \sin^3 u, \cos u) \qquad\qquad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2].$$
Determinare il volume e le coordinate del baricentro di V.

2. Per ogni numero naturale n, consideriamo il sistema
$$\begin{cases} nxy + n^2 \sinh x = 3, \\ n \arctan y + \cos x = 5. \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande il sistema ammette almeno una soluzione $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) (Bonus question) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande la soluzione è unica.
   (c) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande si ha che $x_n > 0$ e $y_n > 0$.
   (d) Determinare, la variare del parametro reale α, il
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n^\alpha}{y_n}.$$

3. Consideriamo la serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^2 + 1}{n^3 x + 1}.$$
   (a) Dimostrare che definisce una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe C^1.
   (b) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{u - t}{\arctan(u + t)}, \qquad\qquad u(1) = \alpha > 1.$$
   (a) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione è globale nel passato.
   (b) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione, nel futuro, è globale e monotona.
   (c) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione, nel futuro, non è monotona.
   (d) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione, nel futuro, è globale ma non monotona.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.