Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 21 Gennaio 2019

1. Consideriamo i seguenti cinque punti nello spazio:

$$A = (0, 1, 0), \qquad B = (1, 1, 0), \qquad C = (1, 2, 3), \qquad D = (0, 0, 1), \qquad E = (-1, 0, -2).$$

   (a) Determinare il punto di intersezione tra il piano passante per A, B e C e la retta passante per D ed E.

   (b) Determinare l'angolo formato dalla retta e dal piano del punto precedente.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 7, \\ 3x + ay + 4z = 8, \\ 3x + y + 2z = b. \end{cases}$$

   (a) Determinare per quali valori reali di a e b il sistema ammette soluzione unica.

   (b) Determinare per quali valori reali di a e b il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\right\}$$

   ed il sottospazio V generato dal vettore $(3, 2, 1)$.

   (a) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

   (b) Determinare le componenti del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto a tale somma diretta.

   (c) Determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione su W in tale somma diretta.

4. (a) Scrivere l'espressione della simmetria centrale rispetto al punto $(3, 2)$ del piano.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $y = 2x$ rispetto a tale simmetria.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.