Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 15 Gennaio 2019

1. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \sin(x^2y + y^4) + \arctan(x^2 - y^5) - x^2y^2.$$

   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto si tratta.

   (b) Stabilire se $f(x,y)$ ammette massimo in $[1,+\infty) \times [1,+\infty)$.

   (c) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x,y)$ in $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

2. Consideriamo la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ y^2 - x^4z^2 + 3z^2 = 1\right\}$$

   ed il campo di vettori

$$E(x,y,z) = \left(-x^2, xy + \cos z, xz + \arctan(x^2)\right).$$

   Determinare il flusso di E attraverso S, orientata in maniera "uscente" rispetto all'asse x.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx}{n^4x^2 + 1}.$$

   (a) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(0,+\infty)$.

   (b) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

   (c) (Bonus question) Stabilire se $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u-t)}{u+t}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel passato.

   (b) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro e monotona.

   (c) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.