1. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = e^{xy}(xy + a)\,dx + (x^2 e^{xy} + \sin(y^2) + z)\,dy + y\,dz.$$

(a) Stabilire per quali valori del parametro reale a la forma differenziale ω risulta esatta in $\mathbb{R}^3$.

(b) Per tali valori di a, calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^2 t, \cos t\right).$$

(a) Indichiamo con A, B, C le 3 componenti. Allora

$$A_y = x e^{xy}(xy+a) + e^{xy} x = x^2 y e^{xy} + (a+1) e^{xy}$$

$$B_x = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}$$

Si deduce che $A_y = B_x \iff a = 1$.

Quindi:

- per $a \neq 1$ la forma non è chiusa, quindi non esatta
- per $a = 1$ si verifica che vale anche $A_z = C_x$ e $B_z = C_y$, dunque la forma è chiusa in $\mathbb{R}^3$ che è sempl. connesso, quindi è esatta.

Conclusione: la forma è $\boxed{\text{esatta} \iff a=1}$.

(b) Per $a=1$, essendo la forma esatta, posso cambiare la curva con una più semplice con gli stessi estremi $(1,0,1)$ e $(-1,0,-1)$.
Scelgo $\hat\gamma(t) = (t,0,t)$ con $t \in [-1,1]$ e cambio il segno per sistemare l'orientazione:

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\hat\gamma} \omega = -\int_{-1}^{1} 1\,dt = \boxed{-2}$$

resta solo il termine con il dx

Oss Per $a=1$ una primitiva di ω è $F(x,y,z) = x e^{xy} + yz + G(y)$, dove $G(y)$ è una primitiva di $\sin(y^2)$.
A questo punto vale anche che

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = -2$$ (i pezzi con la G si cancellano)

— o — o —

2. (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ tale che

$$f(x)^2 + f(x)^3 \cdot \arctan x + x^7 = 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

(b) Dimostrare che $f(x)$ è continua in $[0,1]$ e derivabile in $[0,1)$.

(c) Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando di 360° il grafico della funzione $y = f(x)$ intorno all'asse y. Orientiamo S con la normale che punta verso le y positive.
Calcolare il flusso attraverso S del vettore

$$\left(e^y + \sin z, z^2 + y \arctan x, y e^{x^2}\right).$$

(a) Consideriamo la funzione $F(x,y) = y^2 + y^3 \cdot \arctan x + x^7 - 1$.
Osserviamo che per ogni $x \in [0,1]$ vale
- $F(x,0) \leq 0$ e $F(x,y) \to +\infty$ per $y \to +\infty$
- $y \to F(x,y)$ è strett. crescente (somma di funz. strett. cresc.)

Ne segue che per ogni $x \in [0,1]$ esiste unico $y \geq 0$ t.c. $F(x,y) = 0$.
Quel valore di y è $f(x)$.
Si verifica anche facilmente che $f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \in [0,1)$.

(b) La derivabilità e la continuità in $[0,1)$ seguono dal teorema delle funzioni implicite dopo aver osservato che $F_y(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in [0,1) \times (0,+\infty)$.
Resta da mostrare la continuità in $x = 1$. Prendiamo una qualunque $x_n \to 1^-$ e poniamo $y_n = f(x_n)$. Osserviamo che $y_n \in [0,7]$ visto che $F(x,7) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$. A meno di s. succ. possiamo supporre che $y_n \to y_\infty$. Passando al lim. nella rel. $F(x_n, y_n) = 0$ troviamo $F(1, y_\infty) = 0$, da cui necessariamente $y_\infty = 0 = f(1)$.
Per il lemma della sotto-sotto questo dimostra la continuità.

— o — o —

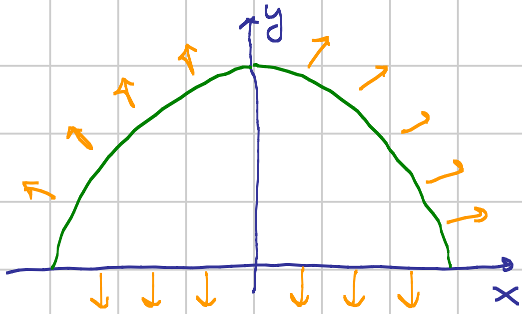
Alternativa per la continuità in $x = 1$: osservare che $F(x, \sqrt{x^7 - 1}) > 0$ e dedurre che

$$0 \leq f(x) \leq \sqrt{x^7 - 1} \qquad \forall x \in [0,1]$$

da cui la tesi facendo il limite per $x \to 1^-$.

— o — o —

(c) Sia $\vec{E}$ il campo in questione.
Sia V il solido che ha come bordo la superficie S e la "base"
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, x^2+z^2 \leq 1\}$.



Allora per Gauss-Green vale che

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy\,dz = \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_B \langle \vec{E}, \underset{\uparrow \text{verso il basso}}{\vec{n}} \rangle \, d\sigma$$

Ora $\operatorname{div} \vec{E} = \arctan x$, ed il suo integrale su V è 0 per simmetria
(la trasformazione $(x,y,z) \to (-x,y,z)$ manda V in sé e $\arctan x$ in $-\arctan x$)

Ne segue che

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_B \langle \vec{B}, \underset{\uparrow \text{verso l'alto}: (0,1,0)}{\vec{n}} \rangle \, d\sigma = \int_B z^2 \, d\sigma$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho = \underbrace{\int_0^1 \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta}_{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

—o—o—

3. Calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+5}{3^n\cdot(2n+3)}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{2n+10}{2n+3}}_{1+\frac{7}{2n+3}} \frac{1}{3^n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{Geometrica}} + \frac{7}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+3}\frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}$$

Per la seconda serie poniamo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(+\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots\right) = \frac{1}{x^3}\left(x - \arctan x\right)$$

$$= 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 3 - 3\sqrt{3}\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

Mettendo tutto insieme la somma risulta

$$\frac{3}{8} + \frac{21}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{4}\pi = \boxed{\frac{87}{8} - \frac{7\sqrt{3}}{4}\pi}$$

— o — o —

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u + \sinh t}{u}, \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Stabilire quale relazione sussiste tra la soluzione con $\alpha = 2018$ e quella con $\alpha = -2018$.

(b) Stabilire se la soluzione con $\alpha = 2018$ ha esistenza globale, nel passato e nel futuro.

(c) (Bonus question) Studiare l'andamento della soluzione con $\alpha = 2018$ per $t \to +\infty$.

(a) Sia $v(t)$ la soluzione con $v(0) = 2018$.

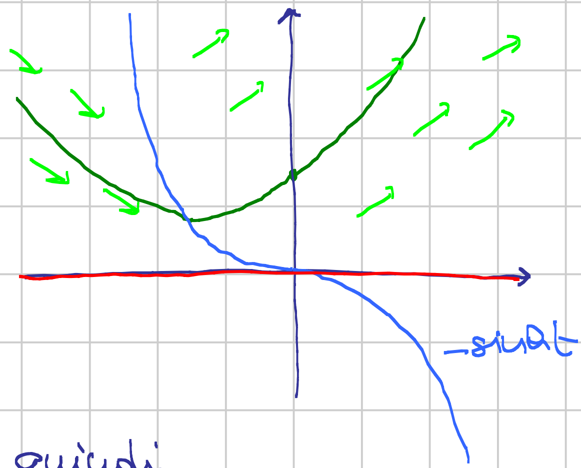
Dico che $\boxed{w(t) = -v(-t)}$ è la soluzione con $w(0) = -2018$.

La verifica del dato iniziale è ovvia. Basta mostrare che w soddisfa l'equazione. Ed infatti

$$\dot{w}(t) = \dot{v}(-t) = \frac{v(-t) + \sinh(-t)}{v(-t)} = \frac{v(-t) - \sinh t}{v(-t)}$$

$$= \frac{-w(t) - \sinh t}{-w(t)} = \frac{w(t) + \sinh t}{w(t)}$$

(b) La sol. con $\alpha = 2018$ ha esistenza globale (passato e futuro)



- Nel passato "scende" fino ad incontrare la curva $-\sinh t$. A quel punto resta sempre sotto la curva stessa (che è sottosoluzione) e quindi non ha blow up e sopra l'ascissa del p.to di contatto (per monotonia) e quindi niente break down.

- Nel futuro per monotonia resta sempre sopra 2018, ed a quel punto

$$0 \leq \dot{u}(t) \leq 1 + \frac{\sinh t}{u} \leq 1 + \frac{\sinh t}{2018}$$

e quindi niente blow up.

(c) Dimostriamo che

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{e^{t/2}} = 1}$$

Questo segue dalle disuguaglianze

$$\sqrt{2\cos\theta t} \leq u(t) \leq \sqrt{2\cos\theta t + 2018^2 e^{t/2}}$$

le quali a sua volta si dimostrano verificando che il LHS è una sottosoluzione, mentre il RHS è una soprasoluzione. Entrambe le verifiche sono davvero "abbondanti".

— o — o —

Oss. Uno potrebbe chiedersi come farsi venire in mente due stime così "naturali" ☺.

- Dal basso osserviamo che $\dot{u} \geq \frac{\sin\theta t}{u}$ e questa si integra...

  facendoci sospettare un andamento del tipo $e^{t/2}$. Tra l'altro, appena $u(t)$ cresce meno di e^t, immediatamente al numeratore comanda $\sin\theta t$, da cui

$$\dot{u} \sim \frac{\sin\theta t}{u}$$

  che conferma il conto precedente.

- Dall'alto a questo punto speriamo che $u(t) \leq Ae^{t/2}$, il che porta a

$$\dot{u} \leq \frac{Ae^{t/2} + \sin\theta t}{u}$$

  Integrando questa e scegliendo saggiamente il valore di A troviamo la soprasoluzione al RHS.

— o — o —