Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 20 Luglio 2018

1. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = e^{xy}(xy + a)\, dx + (x^2 e^{xy} + \sin(y^2) + z)\, dy + y\, dz.$$

   (a) Stabilire per quali valori del parametro reale a la forma differenziale ω risulta esatta in $\mathbb{R}^3$.

   (b) Per tali valori di a, calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^2 t, \cos t\right).$$

2. (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ tale che

$$f(x)^2 + f(x)^3 \cdot \arctan x + x^7 = 1 \qquad \forall x \in [0, 1].$$

   (b) Dimostrare che $f(x)$ è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $[0, 1)$.

   (c) Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando di $360°$ il grafico della funzione $y = f(x)$ intorno all'asse y. Orientiamo S con la normale che punta verso le y positive.
   Calcolare il flusso attraverso S del vettore

$$\left(e^y + \sin z, z^2 + y \arctan x, y e^{x^2}\right).$$

3. Calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n + 5}{3^n \cdot (2n + 3)}.$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u + \sinh t}{u}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Stabilire quale relazione sussiste tra la soluzione con $\alpha = 2018$ e quella con $\alpha = -2018$.

   (b) Stabilire se la soluzione con $\alpha = 2018$ ha esistenza globale, nel passato e nel futuro.

   (c) (Bonus question) Studiare l'andamento della soluzione con $\alpha = 2018$ per $t \to +\infty$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.