1. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^2 + \sinh(y^4) - y \sin x.$$

(a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.

(b) Stabilire se $f(x, y)$ ammette massimo e/o minimo su tutto $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + o(x^2+y^2)$ per $(x,y) \to (0,0)$

Ne segue che l'origine è un pto stazionario. Inoltre

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha det < 0, e quindi si tratta di un $\boxed{\text{p.to di sella.}}$

(b) Su tutto $\mathbb{R}^2$

- $\boxed{\sup f(x,y) = +\infty}$ (basta considerare $f(t,0)$ con $t \to +\infty$)
- $\boxed{\text{min esiste}}$ grazie a Weierstrass generalizzato, in quanto

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

Il limite segue dalla stima

$$f(x,y) \geq x^2 + y^4 - |y| \geq x^2 + y^2 - |y| - 1.$$

A questo punto si può, per esempio, procedere utilizzando le coordinate polari.

— o — o —

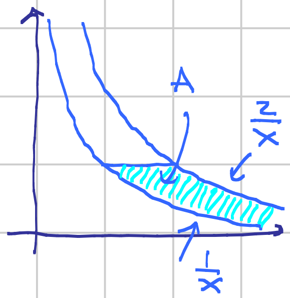
2. Consideriamo gli insiemi $Q = [0, +\infty)^2$ ed $R = [1, +\infty)^2$.
Studiare la convergenza degli integrali

$$\int_R \frac{\arctan(xy)}{y^2 + x^2y^2 + 1}\, dx\, dy, \qquad \int_Q \frac{\arctan(xy)}{y^2 + x^2y^2 + 1}\, dx\, dy.$$

L'integrale $\boxed{\text{in } R \text{ converge}}$ in quanto

$$\int_R \dots \leq \frac{\pi}{2} \int_R \frac{1}{x^2y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} < +\infty$$

L'integrale $\boxed{\text{in } Q \text{ diverge}}$. Consideriamo l'insieme



$$A := \{ (x,y) \in Q : \ 1 \leq xy \leq 2, \ \ y \leq 1 \}.$$

Si verifica che A ha misura infinita e

$$\frac{\arctan(xy)}{y^2 + x^2y^2 + 1} \geq \frac{\arctan(1)}{1 + 4 + 1} \qquad \forall (x,y) \in A$$

num. + piccolo
denom. + grande
tutto positivo

e quindi

$$\int_Q \dots \geq \int_A \text{costante} = +\infty.$$

— o — o —

3. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctan(nx^3)+x}{x+n^2}.$$

(a) Dimostrare che la somma della serie è una funzione di classe C^1 in $(0,+\infty)$.

(b) Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(c) (Bonus question) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

(a) Per ogni A la serie converge totalmente su $[0,A]$ in quanto

$$\frac{\arctan(nx^3)+x}{x+n^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}+A}{n^2}$$

(da cui la tesi per l'M-test di Weierstrass)

La derivata è $\displaystyle f_n'(x) = \left(\frac{3nx^2}{1+n^2x^6}+1\right)\frac{1}{x+n^2} - \frac{\arctan(nx^3)+x}{(x+n^2)^2}$

e questa in ogni intervallo $[a,A] \subseteq (0,+\infty)$ si stima con

$$|f_n(x)| \leq \left(\frac{3nA^2}{1+n^2a^6}+1\right)\frac{1}{n^2} + \frac{\frac{\pi}{2}+A}{n^4}$$

da cui ancora una volta si può applicare l'M-test di Weierstrass

(b) $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = 0}$ $\qquad$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Per il primo basta applicare i teoremi di scambio, avendo convergenza uniforme in $[0,1]$.

Per il secondo basta osservare che tutte le f_n sono ≥ 0, quindi

$$f(x) \geq \sum_{n=0}^{M} f_n(x) \qquad \forall M\in\mathbb{N}$$

da cui

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{disug.}\\ \text{precedente}}}{\geq} \liminf_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{M} f_n(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{proprietà}\\ \text{del liminf}}}{\geq} \sum_{n=1}^{M}\liminf_{x\to+\infty} f_n(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{tutte le } f_n(x)\\ \text{tendono ad } 1\\ \text{per } x\to+\infty}}{=} M$$

La tesi segue dall'arbitrarietà di M.

(c) $\boxed{f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} x \quad \text{per} \quad x \to 0}$

Scriviamo $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx^3)}{x+n^2} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n^2}$

Ora occorre dividere per x e passare a limite.

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(conv. tot. in $[0,1]$, quindi teo. scambio ok)

Resta da dim. che

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\arctan(nx^3)}{x(x+n^2)}}_{g_n(x)} = 0$$

Questo segue dalla convergenza totale della serie delle $g_n(x)$, che a sua volta segue dalle stime

$$g_n(x) \le \frac{n x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}(x+n^2)} \le \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$$g_n(x) \le \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n^2} \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

che permettono di concludere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|g_n(x)| : x \in (0,+\infty)\} \quad \text{converge}$$

Alternativa per il p.to (c): applicando De L'Hôpital si ha che

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. Quest'ultimo risulta facilmente $\frac{\pi^2}{6}$ se si potesse usare il teo. di scambio del limite.
Tuttavia, si può dimostrare che la serie delle derivate converge totalmente in $[0,1]$: per questo basta calcolare esplicitamente il max del termine $\frac{3nx^2}{1+n^2x^6}$, che è il più pericoloso.

— o — o —

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u^3)}{u - t^2}, \qquad u(0) = \alpha \neq 0.$$

(a) Nel caso $\alpha > 0$, studiare l'esistenza globale della soluzione, nel passato e nel futuro.

(b) Stabilire se esistono soluzioni che esistono globalmente nel passato e tendono a $-\infty$ per $t \to -\infty$.

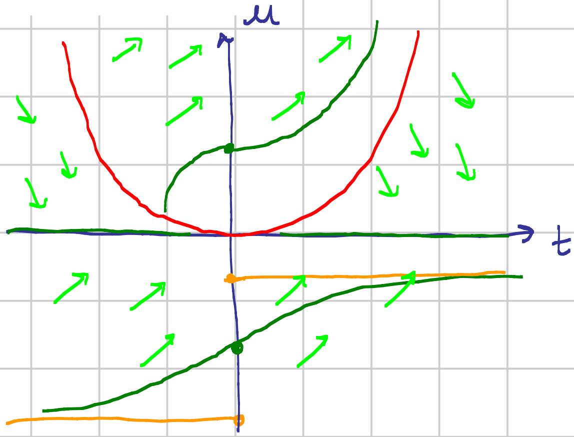
(c) Stabilire se esistono soluzioni che esistono globalmente nel futuro e sono infinitesime per $t \to +\infty$.

(a) Le soluzioni con $\alpha > 0$ hanno

$\boxed{\text{break down nel passato ed esistenza globale nel futuro}}$

Il BD nel passato è ovvio.

Nel futuro



- non si può avere BD perché $t^2 + \varepsilon$ è sottosoluzione in $[0, \frac{\pi}{4\varepsilon}]$
- non si può avere BU in tempo finito perché nel momento in cui $u(t) \geq t^2 + \varepsilon$ anche $|\dot u|$ risulta limitata.

(b-c) Le soluzioni con $\alpha < 0$ hanno esistenza globale nel passato e nel futuro. Inoltre soddisfano

$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} u(t) \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{\lim_{t \to +\infty} u(t) < 0}$$

Per $t \leq 0$ abbiamo che $u(t) \leq \alpha$ e quindi (tenendo conto dei segni)

$$|\dot u(t)| \leq \frac{|\arctan(u^3)|}{|u - t^2|} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha + t^2}$$

da cui

$$u(0) - u(t) \leq \int_t^0 |\dot u(s)|\, ds \leq \frac{\pi}{2} \int_t^0 \frac{1}{\alpha + s^2}\, ds$$

e questo integrale converge per $t \to -\infty$.

Per $t \geq 0$ abbiamo che (sempre tenendo conto dei segni)

$$|\dot{u}(t)| \leq \frac{|\arctan(u^3)|}{|u - t^2|} \leq -\frac{u^3}{t^2} \qquad \forall t > 0$$

Essendo $\dot{u} > 0$, la stessa stima vale anche senza valore assoluto, e quindi

$$\dot{u}(t) \leq -\frac{u(t)^3}{t^2} \qquad \forall t \geq 1 \qquad (\text{e anche } \forall t > 0)$$

Basta ora verificare, risolvendo esplicitamente, che tutte le soluzioni di questa con dato $u(1) = \beta < 0$ hanno limite strettamente negativo per $t \to +\infty$.

— o — o —