Scritto d'esame 2018 – 1

Note Title 07/06/2018

1. Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ e l'insieme

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ x + y = 1,\ |z| \leq 2\}.$$

Determinare estremo inferiore/superiore della funzione $f(x,y,z)$ al variare di (x,y,z) in C, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

C è chiuso (intersezione di chiusi) e limitato ($|z| \leq 2 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 5$).
Per Weierstrass max/min esistono.
Li cerco con i moltiplicatori di Lagrange, usando come vincoli
$\Phi_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1 = 0$ e $\Phi_2(x,y,z) = x+y-1 = 0$

$\boxed{1^\circ \text{ Sistema}}$ $\begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1 $\Longleftrightarrow$ $2z = 0$, $2(x-y) = 0$

Tenendo conto che $x+y=1$ si ottiene $x = y = \frac{1}{2}$ e $z=0$, che non soddisfa la prima equazione.

$\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$
$$\begin{cases} 3x^2 = 2\lambda x + \mu \\ 3y^2 = 2\lambda y + \mu \\ 3z^2 = -2\lambda z \\ \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases}$$

3^a equ

$\swarrow$ $z = -\frac{2}{3}\lambda$ — $\searrow$ $z = 0$

$z=0$ $\xrightarrow{\text{vincoli}}$ $\boxed{(1,0,0) \quad (0,1,0)}$

$z = -\frac{2}{3}\lambda$ $\xrightarrow{1^a \text{equ} - 2^a \text{equ}}$ $3(x^2-y^2) = 2\lambda(x-y)$

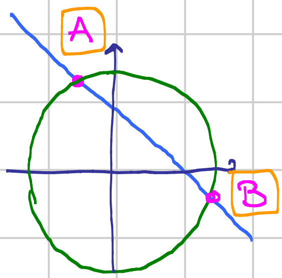
$\swarrow$ $x+y = \frac{2}{3}\lambda = -z$ $\searrow$ $x = y$

$x+y = \frac{2}{3}\lambda = -z$ $\downarrow$
$$\begin{cases} z = -1 \\ x+y = 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

$1 = (x+y)^2 = \underbrace{x^2+y^2}_{=2} + 2xy$

$xy = -\frac{1}{2}$

$x = y$ $\downarrow$ $x = y = \frac{1}{2}$ $\downarrow$ non si trova z



$\boxed{\text{Bordi dei bordi}}$ $z = \pm 2$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x+y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\begin{matrix} (2,-1,2) & (2,-1,-2) \\ (-1,2,2) & (-1,2,-2) \end{matrix}}$$

In conclusione abbiamo 8 candidati

$(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ $\rightsquigarrow$ $f = 1$

$(2,-1,2)$ e $(-1,2,2)$ $\rightsquigarrow$ $f = 15$

$(2,-1,-2)$ e $(-1,2,-2)$ $\rightsquigarrow$ $f = -1$

A e B $\rightsquigarrow$ $x^3+y^3+z^3 = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{(x+y)}}{}^3 - 3\,\overset{-\frac{1}{2}}{\overset{\shortparallel}{xy}}\,\overset{1}{\overset{\shortparallel}{(x+y)}} + z^3$

$= 1 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2}$

Conclusione: $\boxed{\begin{array}{lll} \text{Max} = 15, & \text{pti di max} & (2,-1,2) \text{ e } (-1,2,2) \\ \text{min} = -1, & \text{pti di min} & (2,-1,-2) \text{ e } (-1,2,-2) \end{array}}$

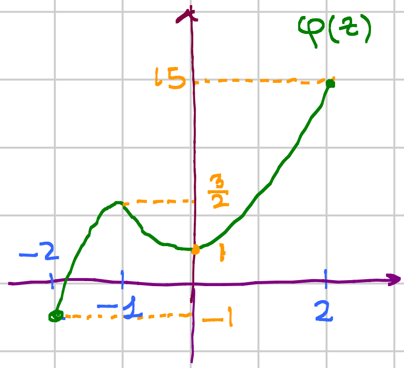
<u>Approccio alternativo</u>

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x^2+y^2 = 1+z^2 \end{cases} \Rightarrow 2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 1 - 1 - z^2 = -z^2$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 = 1 + \frac{3}{2}z^2 + z^3 = \varphi(z)$$

Studiando la funzione $\varphi(z)$ per $z \in [-2,2]$ scopriamo che ha

- Max $= 15$ per $z = 2$. Sostituendo nei vincoli troviamo i pti di max $(2,-1,2)$ e $(-1,2,2)$
- Min $= -1$ per $z = -2$. Sostituendo nei vincoli troviamo i p.ti di min $(2,-1,-2)$ e $(-1,2,-2)$.



Osserviamo che $\varphi(z)$ ha $z = 0$ e $z = -1$ come p.ti stazionari, e anche questi erano saltati fuori dal metodo dei moltiplicatori.

— o — o —

2. Sia $Q = [0, +\infty)^2$ il primo quadrante in $\mathbb{R}^2$.

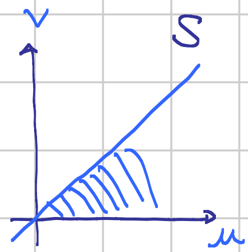
(a) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza dell'integrale
$$\int_Q \frac{\log(1+x^2+y)}{(x^2+y^4)^a}\,dx\,dy.$$

(b) (Bonus question) Per ogni numero reale $r>0$ poniamo $E_r = \{(x,y)\in Q : x^2+y^2 \ge r^2\}$. Calcolare, al variare del parametro reale λ, il limite
$$\lim_{r\to+\infty} r^\lambda \int_{E_r} \frac{\log(1+x^2+y)}{x^2+y^4}\,dx\,dy.$$

(a) Con il cambio di variabili $x=u^2$, $y=v$ troviamo $J=2u$ e ci riduciamo a studiare l'integrale
$$\int_Q \frac{\log(1+u^4+v)}{(u^4+v^4)^a}\,u\,du\,dv$$
che passando in coord. polari diventa
$$\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\rho^4\cos^4\theta+\rho\sin\theta)}{\rho^{4a}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)^a}\,\rho\cos\theta\cdot\rho\,d\theta = I_a$$
Poiché $\cos^4\theta+\sin^4\theta \ge m > 0$ per ogni $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ si ha
$$I_a \le \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\rho^4+\rho)}{\rho^{4a-2}\,m^a}\,d\theta \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{m^a}\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+\rho+\rho^4)}{\rho^{4a-2}}\,d\rho$$
e l'ultimo integrale converge

- all'infinito quando $4a-2>1$, cioè $a>3/4$ (il log non conta)
- a 0 si comporta come
$$\frac{\rho}{\rho^{4a-2}}$$
e quindi converge quando $4a-3<1$, cioè $a<1$.

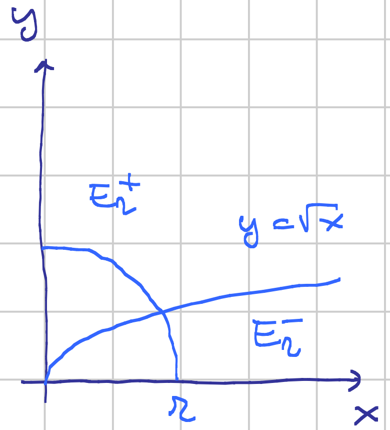
Di conseguenza I_a converge di sicuro quando $a\in(\frac{3}{4},1)$.
Resta da mostrare che negli altri casi diverge.
Per far questo basta mettersi in un settore S con $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ e osservare che



$$I_a \ge \int_S \dots \ge \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\rho^4\frac{1}{2})}{\rho^{4a}\,2^{2a}}\,\rho^2\frac{\sqrt{2}}{2}\,d\theta$$
e osservare che per $a\notin(3/4)$ il RHS diverge (per colpa di 0 o $+\infty$ a seconda dei casi). Conclusione: si ha $\boxed{\text{convergenza} \iff a\in(\frac{3}{4},1)}$

(b) L'idea è che $\displaystyle\int_{E_r} \dots \sim c\,\frac{\log r}{\sqrt{r}}$ da cui

$$\boxed{\lim_{r\to+\infty} r^\lambda \int_{E_r} \dots = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \lambda \geq \frac{1}{2} \end{cases}}$$



Per stimare l'integrale dal basso osserviamo che

$$\int_{E_r} \dots \geq \int_r^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \,\frac{\log(1+x^2+y)}{x^2+y^4}$$

$$\geq \int_r^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\log(1+x^2)}{2x^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_r^{+\infty} dx\,\frac{\log(1+x^2)}{x\sqrt{x}} \sim c\,\frac{\log r}{\sqrt{r}}$$

dove l'ultima stima asintotica si dimostra facilmente con Hôpital. Da questo si deduce che il limite con $\lambda \geq \frac{1}{2}$ fa $+\infty$.

Per stimare l'integrale dall'alto ragioniamo in modo analogo dopo aver spezzato in 2 zone come in figura.

$$\int_{E_r^-} \dots \leq \int_{\frac{r}{4}}^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \dots \leq \int_{\frac{r}{4}}^{+\infty} dx\,\sqrt{x}\cdot\frac{\log(1+x^2+\sqrt{x})}{x^2} \sim c\,\frac{\log r}{\sqrt{r}}$$

$$\int_{E_r^+} \dots \leq \int_{\frac{\sqrt{r}}{2}}^{+\infty} dy \int_0^{y^2} dx \dots \leq \int_{\frac{\sqrt{r}}{2}}^{+\infty} dy\, y^2\,\frac{\log(1+y^4+y)}{y^4} \sim c\,\frac{\log r}{\sqrt{r}}$$

dove ancora una volta l'ultima stima si dimostra con De L'Hôpital.

— o — o —

3. (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞, tale che

$$f(x) + x^2 e^{f(x)} = x^2 + e^{x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \cos x}{\log(1+x^2)}.$$

(c) Calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

(a) Consideriamo $\Phi(x,y) = y + x^2 e^y - x^2 - e^{x^4} = 0$.
Vogliamo esplicitare y rispetto ad x. Fissato un qualunque $x \in \mathbb{R}$, la funzione $y \to \Phi(x,y)$ è strett. monotona in quanto $\Phi_y(x,y) = 1 + x^2 e^y \geq 1 > 0$. Inoltre $\Phi(x,y) \to \pm\infty$ per $y \to \pm\infty$. Ne segue che c'è un unico p.to di annulla-mento in mezzo, che è proprio $f(x)$.
Poiché $\Phi_y(x,y) > 0$ sempre, la regolarità segue dalla regola-rità di Φ e dal teorema delle funzioni implicite.

(b) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x)$ con centro in $x=0$. Poiché si vede che $f(0)=1$, il polinomio sarà del tipo $1+ax+bx^2$. Sostituendo nel LHS e RHS troviamo

$$1+ax+bx^2 + x^2 \cdot e^{1+ax+ax^2} = x^2 + e^{x^4}$$

$$1+ax+bx^2 + ex^2 + o(x^2) = x^2 + 1 + o(x^2)$$

da cui $a=0$ e $b = 1-e$. Ne segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \cos x}{\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1} + (1-e)x^2 \cancel{-1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \boxed{\frac{3}{2} - e}$$

(c) Dimostriamo che $\boxed{f(x) \sim x^4}$ per $x \to +\infty$. Per fare questo basta mostrare che $x^4 - x^3 \leq f(x) \leq x^4$.
A sua volta, per far questo basta mostrare che

$$\Phi(x, x^4 - x^3) \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \Phi(x, x^4) \geq 0$$

per x abbastanza grande. La seconda è evidente. La prima è equivalente a

$$e^{x^4} \geq x^4 - x^3 - x^2 + x^2 e^{x^4 - x^3}$$

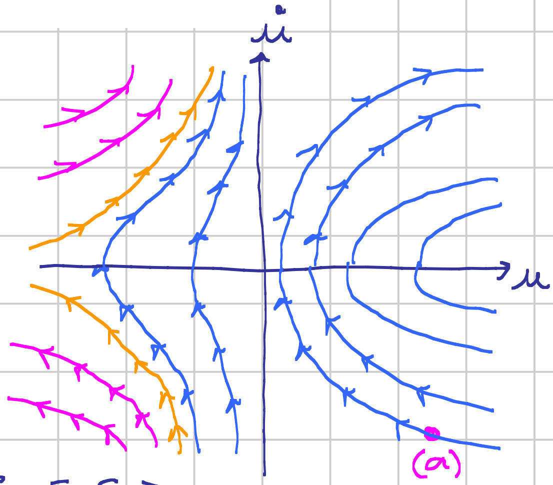
e questa diventa evidente quando si divide per e^{x^4}.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' = \frac{1}{u^4}.$$

(a) Dimostrare che la soluzione con dati $u(0) = 1$ e $u'(0) = -2018$ è globale nel passato e nel futuro, e calcolarne la parte principale per $t \to +\infty$.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale α la soluzione con dati $u(0) = -1$ e $u'(0) = \alpha$ ha esistenza globale nel futuro.



Con il metodo energetico troviamo che

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{3u^3} = \text{costante}$$

lungo le traiettorie

(a) In questo caso $\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{3u^3} = \frac{2018^2}{2} + \frac{1}{3} = c > 0$

Questo in particolare mostra che $\frac{1}{3u^3} \le c$ e quindi $u \ge \frac{1}{\sqrt[3]{3c}}$ cioè u è maggiore di una costante strettamente positiva fino a quando esiste $\rightsquigarrow$ no break down.
Analogamente $|\dot{u}| \le$ costante $\rightsquigarrow$ no blow up $\rightsquigarrow$ esist. glob.
Dal momento che $\ddot{u} \ge$ cost. strett. positiva, prima o poi $\dot{u}$ diventa positiva, e da quel momento in poi u risolve

$$\dot{u} = \sqrt{2c - \frac{1}{3u^3}}$$

A quel punto $u(t)$ tende a $+\infty$ e $u(t) \sim \sqrt{2c}\, t$, come si dimostra calcolando con De L'Hôpital il

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \dot{u}(t) = \sqrt{2c} = \boxed{\sqrt{2018^2 + \frac{2}{3}}}$$

(b) In questo caso $\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{3u^3} = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{3} = c$

Ora bisogna distinguere un po' di casi

- Se $|\alpha| \ge \sqrt{\frac{2}{3}}$ la costante è ≥ 0 e, considerando che u è negativa, questo ci dice che $\dot{u}$ non si può mai annullare.

Ne segue che u risolve

$$\dot{u} = \pm \sqrt{2c - \frac{1}{3u^3}}$$

$\uparrow$ stesso segno di α

e le soluzioni di questa con dato $u(0) = -1$ hanno nel futuro

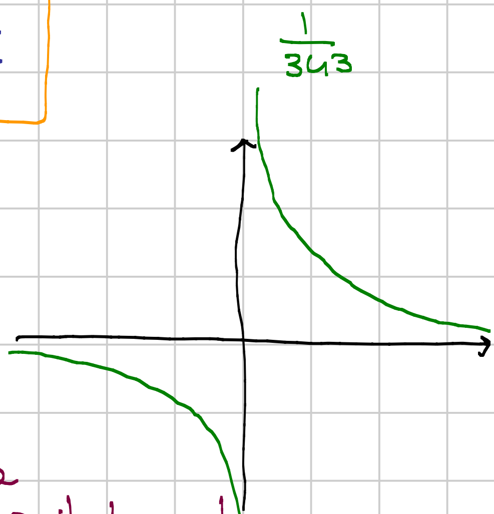
→ esistenza globale se il segno è negativo

→ break down in tempo finito se il segno è positivo.

- Se $|\alpha| < \sqrt{\frac{2}{3}}$, allora $c < 0$. Tutte queste soluzioni hanno break down per tempi positivi in quanto
  - → se ad un certo istante $\dot{u} \geq 0$, allora da lì in poi continua ad esserlo (infatti $\ddot{u} \geq 0$). Ma allora da quel tempo in poi la u risolve l'eq. di sopra con il segno $+$, da cui il break down
  - → fino a quando $\dot{u} < 0$ la soluzione u diventa sempre più negativa, dunque $\ddot{u} \geq$ costante positiva, e quindi prima o poi la soluzione (se sopravvive) arriva ad avere derivata ≥ 0. Da quel pto siamo nel caso precedente.

Conclusione: la soluzione con $u(0) = -1$ e $\dot{u}(0) = \alpha$ ha, nel futuro

- esistenza globale se $\alpha \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$
- break down se $\alpha > -\sqrt{\frac{2}{3}}$



Osservazione I risultati precedenti si interpretano bene pensando all'energy landscape

- con $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = \alpha$ non ci sono mai probl.
- con $u(0) = -1$ deve essere $\dot{u}(0)$ neg. e grande in modo da non tornare mai indietro verso il baratro.