Sottospazi vettoriali 5

Argomenti: somme dirette e relative componenti **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto su sottospazi vettoriali, Span, dimensione, cambi di base

Nella seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale X e due sottospazi vettoriali V e W, definiti, a seconda dei casi, dalle relazioni indicate o come lo Span dei vettori indicati nella corrispondente colonna. Determinare se X è somma diretta di V e W. In caso affermativo, determinare le matrici che rappresentano (rispetto alla base canonica di X) le proiezioni su V e W, pensate come funzioni da X in X. È probabile che le matrici non stiano nelle caselline …

	X	V	W	$X \stackrel{?}{=} V \oplus W$	Proj_V	Proj_W
1)	$\mathbb{R}^2$	$(2,3)$	$(1,1)$	SÍ	V_1	W_1
2)	$\mathbb{R}^2$	$x+3y=0$	$3x+y=0$	SÍ	V_2	W_2
3)	$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(4,5,6)$	NO	—	—
4)	$\mathbb{R}^3$	$x+y+z=0$	$z=x+y$	NO	—	—
5)	$\mathbb{R}^3$	$x=y=z$	$x+y+z=0$	SÍ	V_5	W_5
6)	$\mathbb{R}^3$	$x-y+z=0$	$(1,1,0)$	NO	—	—
7)	$\mathbb{R}^3$	$x-y+z=0$	$(1,0,1)$	SÍ	V_7	W_7
8)	$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$ $(0,1,1)$	$(1,1,1)$	SÍ	V_8	W_8
9)	$\mathbb{R}^4$	$x+y=z+w$	$(1,1,0,1)$	SÍ	V_9	W_9
10)	$\mathbb{R}^4$	$(1,0,0,0)$ $(0,1,0,0)$	$(1,1,0,0)$ $(0,0,1,1)$	NO	—	—
11)	$\mathbb{R}^4$	$(1,0,0,0)$ $(0,1,0,0)$	$(1,0,1,0)$ $(0,1,0,1)$	SÍ	V_{11}	W_{11}
12)	$\mathbb{R}^4$	$x+2y=3z$ $x-w=y$	$y=z$ $x=z+w$	NO	—	—
13)	$\mathbb{R}_{\le 3}[x]$	$p(0)=p(1)=0$	x^2+3 x^2-3	SÍ	V_{13}	W_{13}
14)	$\mathbb{R}_{\le 3}[x]$	$p(0)=p(1)=0$	$p(2)=p(3)=0$	SÍ	V_{14}	W_{14}
15)	$\mathbb{R}_{\le 3}[x]$	$p(x)=p(-x)$	$p(x)=-p(-x)$	SÍ	V_{15}	W_{15}
16)	$\mathbb{R}_{\le 3}[x]$	$p(x)=p(-x)$	$p(0)=p'(0)=0$	NO	—	—
17)	$M_{2\times 2}$	$A=A^t$	$A=-A^t$	SÍ	V_{17}	W_{17}

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad W_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad W_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$V_5 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad W_5 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad W_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad W_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V_9 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad W_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{14} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & -2 \\ 15 & 21 & 15 & 9 \\ -18 & -18 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W_{14} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ -15 & -15 & -15 & -9 \\ 18 & 18 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$V_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad W_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{17} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad W_{17} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$