Applicazioni lineari 4

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle applicazioni lineari e cambi di base

Nella seguente tabella sono assegnati uno spazio vettoriale V, un po' di condizioni che determinano univocamente un'applicazione lineare $f : V \to V$, ed una base di V. Si chiede di determinare la dimensione D_K del ker, la dimensione D_I dell'immagine, la dimensione $D_{K\cap I}$ dell'intersezione tra ker e immagine (nota bene: questa intersezione ha senso solo perché lo spazio di partenza coincide con quello di arrivo), ed infine la matrice che rappresenta f usando in partenza ed arrivo la base assegnata.

	V	Condizioni	Base	D_K	D_I	$D_{K\cap I}$	Matrice	
1)	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (-1,1)$ $(1,0) \to (2,2)$	$v_1 = (-1,2)$ $v_2 = (1,-3)$	0	2	0	$\begin{matrix} 18 & -23 \\ 13 & -33/2 \end{matrix}$	
2)	$\mathbb{R}^2$	$(1,1) \to (2,6)$ $(1,3) \to (0,0)$	$v_1 = (3,2)$ $v_2 = (4,3)$	1	1	1	$\begin{matrix} -63 & -81 \\ 59 & 63 \end{matrix}$	
3)	$\mathbb{R}^2$	$(0,1) \to (1,1)$ $(-1,2) \to (2,2)$	$v_1 = (1,1)$ $v_2 = (0,1)$	1	1	0	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	
4)	$\mathbb{R}^3$	$(1,0,1) \to (1,1,-1)$ $(2,2,0) \to (3,3,-3)$ $(0,1,1) \to (2,2,-2)$	$v_1 = (1,1,-1)$ $v_2 = (-1,-1,1)$ $v_3 = (2,1,1)$	2	1	0	$V_2 = -V_1 \to$	NO BASE
5)	$\mathbb{R}^3$	$(1,0,1) \to (1,1,-1)$ $(2,2,0) \to (3,3,-3)$ $(0,1,1) \to (2,2,-2)$	$v_1 = (1,-1,2)$ $v_2 = (1,-1,1)$ $v_3 = (-1,2,1)$	2	1	0	$\begin{matrix} -3 & -3/2 & -18 \\ 9/2 & -3/4 & 27 \\ 1 & -1/2 & 6 \end{matrix}$	
6)	$\mathbb{R}^3$	$(1,0,2) \to (-17,27,7)$ $(1,1,0) \to (0,-1,1)$ $(0,1,1) \to (-7,11,3)$	$v_1 = (1,0,0)$ $v_2 = (1,1,0)$ $v_3 = (1,1,1)$	1	2	0	$\begin{matrix} -2 & 1 & -20 \\ 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}$	
7)	$\mathbb{R}^4$	$(1,0,-1,0) \to (1,1,0,0)$ $(0,1,0,-1) \to (0,0,1,1)$ $(1,0,1,0) \to (1,1,1,1)$ $(0,1,0,1) \to (3,3,2,2)$	$v_1 = (1,0,0,1)$ $v_2 = (0,1,0,1)$ $v_3 = (0,0,1,1)$ $v_4 = (0,0,0,1)$	2	2	0	$\to$	$\begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 3/2 & 3/2 \\ 5/2 & 3 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ -5 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$
8)	$\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$ $\leq$	$x^3 \to 3x^2$ $x^2 \to 2x$ $x \to 1$ $1 \to 0$	$v_1 = x^3$ $v_2 = x^2$ $v_3 = x$ $v_4 = x^3 + 1$	1	3	1	$\to$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
9)	$\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$ $\leq$	$x^3 + 1 \to x^2 + 1$ $x^3 + 2 \to x^2 + 2$ $x^2 \to x^2 + 3$ $x \to x^2 + 4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$	2	2	0	$\to$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$