Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 18 Maggio 2017

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \int_{x^2}^{x^6} \frac{\arctan t}{\sqrt{t} + t^4}\, dt.$$
   (a) Determinare se $f(x)$ ammette massimo e/o minimo per $x > 0$.

   (b) Studiare uniforme continuità e lipschitzianità di $f(x)$ in $(0, +\infty)$.

   (c) Determinare per quali valori del parametro reale positivo α si ha convergenza dell'integrale
$$\int_1^{+\infty} [f(x)]^\alpha\, dx.$$
   (d) (Bonus question) Determinare per quali valori del parametro reale β l'espressione
$$\varphi(x) = f(x) + \beta \sinh(x^3)$$
   definisce una funzione $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ invertibile e, nei casi in cui succede, studiare l'hölderianità in $(0, +\infty)$ della funzione inversa.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) = 7 \arctan x + \sin(x^2).$$
   (a) Dimostrare che esistono due numeri reali positivi a e b per cui $f(x)$, vista come funzione $f : [-1, 1] \to [-a, b]$, risulta invertibile.

   (b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 con centro nell'origine dell'inversa della restrizione di $f(x)$ considerata al punto precedente.

   (c) Determinare per quali valori del parametro reale $M \geq 0$ l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M\}$$
   risulta compatto.

   (d) Stabilire se $f(x)$ è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.