Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 6 Aprile 2017

(Problemi da 3 punti)

1. Determinare una primitiva della funzione $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

2. Calcolare
$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\,dx.$$

3. Determinare per quali valori del parametro reale positivo a si ha convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}\,dx.$$

4. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da $x_0 = 2016$, $x_1 = 2017$, e
$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 5x_n + 7^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Calcolare il limite di $7^{-n}x_n$.

(Problemi da 8 punti)

5. Studiare la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx.$$

6. (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy (precisando l'intervallo massimale di esistenza)
$$u' + \frac{u}{1+t} = \arctan t, \qquad u(0) = 1.$$
(b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$u'' + \frac{u'}{1+t} = 0.$$
(c) (Bonus question) Determinare se l'equazione differenziale
$$u'' + \frac{u'}{1+t} = \arctan t$$
ammette soluzioni limitate per $t \geq 0$.

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} + \frac{a}{n}, \qquad x_1 = \frac{1}{2017},$$
dove a è un parametro reale.
(a) Determinare, nel caso $a = 0$, il limite della successione.
(b) Dimostrare che, nel caso $a = 1/100$, la successione è definitivamente monotona.
(c) (Ultra bonus) Sempre nel caso $a = 1/100$, determinare il limite della successione $(x_n)^n$.

1. Determinare una primitiva della funzione $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tan^2 x = (\tan x)' \tan^2 x = \left(\frac{1}{3}\tan^3 x\right)'$$

2. Calcolare

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\,dx.$$

PONIAMO: $\quad \delta = \sqrt{x+1} + 2 \qquad d\delta = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = \dfrac{1}{2\delta - 4}\,dx$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\,dx = \int_3^4 \frac{2\delta - 4}{\delta}\,d\delta = \Big[2\delta - 4\log\delta\Big]_3^4 =$$

$$= 8 - 4\log 3 - 6 + 4\log 3 = 2 + 4\log 3/4$$

3. Determinare per quali valori del parametro reale positivo a si ha convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}\,dx.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}\,dx = \int_0^{1} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}\,dx \qquad (1)$$

$$f(x) = \frac{\arctan(x^2)}{x^a} \geq 0 \qquad g(x) = \frac{1}{x^b} > 0 \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\arctan(x^2)}{x^{a-b}} = \begin{cases} +\infty & a-b-2 > 0 \\ 1 & a-b-2 = 0 \\ 0 & a-b-2 < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx \quad \begin{cases} \text{CONVERGE PER } b < 1 \\ \text{DIVERGE A } +\infty \text{ PER } b \geq 1 \end{cases}$$

PER CONFRONTO ASINTOTICO CON $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{\arctan(x^2)}{x^a}\,dx \quad \begin{cases} \text{CONVERGE PER } \begin{cases} a \leq 2+b \\ b < 1 \end{cases} \Rightarrow a < 3 \\ \\ \text{DIVERGE A } +\infty \text{ PER } a \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{ARCTAN}(x^2)}{x^{a-b}} = \begin{cases} +\infty & a<b \\ 1 & a=b \\ 0 & a>b \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \quad \begin{cases} \text{CONVERGE PER } b>1 \\ \text{DIVERGE A } +\infty \text{ PER } b\le 1 \end{cases}$$

PER CONFRONTO ASINTOTICO CON $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$

$$(3)\quad \int_1^{+\infty} \frac{\text{ARCTAN}(x^2)}{x^a}\,dx \quad \begin{cases} \text{CONVERGE PER } \begin{cases} a\ge b \\ b>1 \end{cases} \Rightarrow a>1 \\ \text{DIVERGE A } +\infty \text{ PER } a\le 1 \end{cases}$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\text{ARCTAN}(x^2)}{x^a}\,dx \quad \begin{cases} \text{CONVERGE PER } a\in(1,3) \\ \text{DIVERGE A } +\infty \text{ PER } \mathbb{R}\setminus(1,3) \end{cases}$$

4. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da $x_0 = 2016$, $x_1 = 2017$, e

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 5x_n + 7^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare il limite di $7^{-n}x_n$.

1) SOLUZIONE DELL'OMOGENEA $x_n = c\lambda^n$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$$

2) SOLUZIONE SPECIALE $x_n = a\,7^n$

$$a\,7^2 = 3a\cdot 7 + 5a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{23}$$

$$\Rightarrow x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \frac{1}{23}7^n$$

$$\Rightarrow x_n\cdot 7^{-n} = c_1(\lambda_1/7)^n + c_2(\lambda_2/7)^n + \frac{1}{23} \to \frac{1}{23}$$

5. Studiare la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx.$$

(1) $$\int_0^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx = \int_0^1 x^{18}\cos(x^{30})\,dx + \int_1^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx$$

(2) $$\int_0^1 x^{18}\cos(x^{30})\,dx = a \in \mathbb{R}$$

$$\int_1^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A x^{18}\cos(x^{30})\,dx$$

$$\int_1^A x^{18}\cos(x^{30})\,dx = \int_1^A \overset{G}{\left(\frac{x^{-11}}{30}\right)} \overset{f}{\left(30x^{29}\cos(x^{30})\right)}\,dx =$$

$$= \left[\overset{G}{\frac{x^{-11}}{30}}\,\overset{F}{\sin(x^{30})}\right]_1^A - \int_1^A \overset{g}{-\frac{11}{30}x^{-12}}\,\overset{F}{\sin(x^{30})}\,dx =$$

$$= \frac{\sin(A^{30})}{30A^{11}} - \frac{\sin(1)}{30} + \frac{11}{30}\int_1^A \frac{\sin(x^{30})}{x^{12}}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx = \lim_{A\to+\infty} \frac{\sin(A^{30})}{30A^{11}} - \frac{\sin(1)}{30} + \frac{11}{30}\int_1^A \frac{\sin(x^{30})}{x^{12}}\,dx =$$

$$= -\frac{\sin(1)}{30} + \frac{11}{30}\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x^{30})}{x^{12}}\,dx \quad (3)$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(x^{30})|}{x^{12}}\,dx \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx < +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x^{30})}{x^{12}}\,dx < +\infty$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx$ CONVERGE

6. (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy (precisando l'intervallo massimale di esistenza)

$$u' + \frac{u}{1+t} = \arctan t, \qquad u(0) = 1.$$

(b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u'' + \frac{u'}{1+t} = 0.$$

(c) (Bonus question) Determinare se l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{u'}{1+t} = \arctan t$$

ammette soluzioni limitate per $t \geq 0$.

(a) SI TRATTA DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI ORDINE 1 A COEFF. VARIABILI LA CUI SOLUZIONE GENERALE É LA SEGUENTE

$$u(\sigma) = e^{-A(\sigma)} \left\{ c + \int b(s) e^{A(s)} ds \right\}$$

CON

$$\begin{cases} A(\sigma) \text{ PRIMITIVA DI } a(\sigma) = \dfrac{1}{1+\sigma} \Rightarrow A(\sigma) = \log(1+\sigma) \\ b(s) = \text{ARCTAN } s \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma} \left\{ c + \int (1+s) \,\text{ARCTAN } s \, ds \right\} \quad (1)$$

$$\int \overset{f}{(1+s)} \, \overset{G}{\text{ARCTAN } s} \, ds = \overset{F}{\left(\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \overset{G}{\text{ARCTAN } \sigma} - \int \overset{F}{\left(s + \frac{s^2}{2}\right)} \overset{g}{\frac{1}{1+s^2}} ds \quad (2)$$

$$\int \left(s + \frac{s^2}{2}\right) \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} \int \frac{2s + s^2}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} \int \frac{2s}{1+s^2} ds + \frac{1}{2} \int ds +$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} \log(1+\sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} \text{ARCTAN } \sigma \quad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow \int (1+s) \,\text{ARCTAN } s \, ds = \left(\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ARCTAN } \sigma +$$

$$- \frac{1}{2} \log(1+\sigma^2) - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2} \text{ARCTAN } \sigma$$

$$= \frac{1}{2}\left((1+\sigma)^2 \arctan\sigma - \log(1+\sigma^2) - \sigma \right) \quad (\varsigma)$$

$$(1),(\varsigma) \Rightarrow u(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma}\left(c + \frac{1}{2}\left((1+\sigma)^2 \arctan\sigma - \log(1+\sigma^2) - \sigma\right)\right)$$

$$u(0) = c + 0 = 1 \rightsquigarrow c = 1$$

$$\begin{cases} u(\sigma) = \dfrac{2 + (1+\sigma)^2 \arctan\sigma - \log(1+\sigma^2) - \sigma}{2(1+\sigma)} & (5) \\ \text{INTERVALLO MAX DI ESISTENZA} \quad \sigma \in (-1, +\infty) \end{cases}$$

$$(b) \quad u'' + \frac{u'}{1+\sigma} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} u' = \frac{c}{1+\sigma} \Rightarrow u = c\log(1+\sigma) + Q$$

VERIFICA: $u'' = -\dfrac{c}{(1+\sigma)^2} = -\dfrac{c/(1+\sigma)}{(1+\sigma)} = -\dfrac{u'}{1+\sigma}$

$$(c) \quad u'' + \frac{u'}{1+\sigma} = \arctan\sigma$$

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} u'(\sigma) = \frac{c + (1+\sigma)^2 \arctan\sigma - \log(1+\sigma^2) - \sigma}{2(1+\sigma)}$$

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} + \frac{a}{n}, \qquad x_1 = \frac{1}{2017},$$

dove a è un parametro reale.

(a) Determinare, nel caso $a = 0$, il limite della successione.

(b) Dimostrare che, nel caso $a = 1/100$, la successione è definitivamente monotona.

(c) (Ultra bonus) Sempre nel caso $a = 1/100$, determinare il limite della successione $(x_n)^n$.

(a) PIANO

(i) $0 \leq x_n \leq 1$ (ii) $x_{n+1} \geq x_n$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (iv) $\ell = 1$

(i) DIM. PER INDUZIONE

$\underline{x_n \geq 0}$

PASSO BASE $x_1 = 1/2017 \geq 0$

PASSO INDUTTIVO $x_n \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq 0$

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} \geq 0 \quad \square$$

$\underline{x_n \leq 1}$

PASSO BASE $x_1 = 1/2017 \leq 1$

PASSO INDUTTIVO $x_n \leq 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq 1$

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} \overset{?}{\leq} 1 \iff 5x_n \leq 4 + x_n \qquad x_n \leq 1 \quad \square$$

(ii) $$x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} \overset{?}{\geq} x_n \iff 5x_n \geq 4x_n + x_n^2 \iff x_n^2 - x_n \leq 0$$

$$\iff \underbrace{x_n}_{\geq 0}\underbrace{(x_n - 1)}_{\leq 0} \leq 0 \quad \square$$

(iii) LA SUCCESSIONE È MONOTONA (ii) E LIMITATA (i)

$\Rightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad \square$

(iv) $x_n \to \ell \Rightarrow \ell = \dfrac{5\ell}{4+\ell}$ $\quad 4\ell + \ell^2 = 5\ell \quad \ell^2 - \ell = 0$

$$\Rightarrow \ell(\ell - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ell = 0 & \text{NON ACCETTABILE (ii)} \\ \ell = 1 & \square \end{cases}$$

(b) $x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} + \frac{a}{n}$

SE ESISTE $n_0 \geq 1$ T.C. $x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$ ALLORA
$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \geq n_0$

DIM PER INDUZIONE

PASSO BASE $x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$

PASSO INDUTTIVO $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$

PER HP. INDUTTIVA

$$x_{n+2} = \frac{5x_{n+1}}{4+x_{n+1}} + \frac{a}{n+1} \leq \frac{5x_n}{4+x_n} + \frac{a}{n} = x_{n+1}$$

CRESCENTE (VOL. (a))

$\frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{n}$

PERTANTO CI SONO 2 POSSIBILITÀ:

1) x_n SEMPRE CRESCENTE
2) x_n DEF. DECRESCENTE

$\Rightarrow$ x_n È DEFINITIVAMENTE MONOTONA

(c) $(x_n)^n$