

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $f(x, y) = x^2y$ e sia D il dominio di \mathbb{R}^2 definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 27, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Determinare massimo e minimo di f in D e i relativi punti di massimo/minimo.

2. Sia V il solido di \mathbb{R}^3 definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z^4, z \geq 0\}.$$

(a) Calcolare il volume di V .

(b) Calcolare

$$\int_V x^2 dx dy dz.$$

3. Sia $D := [0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

(a) Provare che

$$\int_D \frac{\log(1+xy)}{1+(x^2+y^2)^4} dx dy < +\infty.$$

(b) Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge

$$\int_D \frac{\log(1+xy)}{1+(x^2+y^2)^\alpha} dx dy.$$

4. Sia D il dominio di \mathbb{R}^2 delimitato dalla curva γ parametrizzata da $\gamma(t) = (t-t^2, t^3)$ con $0 \leq t \leq 1$ e dall'asse delle y .

(a) Fare un disegno approssimativo di D .

(b) Calcolare

$$\int_D y^3 dx dy.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.

Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri l'insieme D definito da

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x^2 + y = 1, y \geq 0\}.$$

- (a) Provare che D è limitato.
(b) Determinare estremo superiore e inferiore di $f(x, y, z) = xy + z$ su D precisando se si tratta di massimo e/o minimo ed in caso affermativo determinare anche i punti di massimo/minimo.

2. Siano:

$$B_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 1/2\}.$$

Calcolare

$$\int_{B_1} |y| \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad \int_{B_2} |y| \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

3. Sia $D := [1, +\infty[\times [0, 1]$. Stabilire per quali $\alpha > 0$ si ha

$$\int_D \frac{x^\alpha}{1 + x^2 + xy^2} \, dx \, dy < +\infty.$$

4. Si considerino il campo di vettori F e la superficie S definiti da

$$F(x, y, z) = (x + y^4, 2y - z^3, x^2 - 3z), \quad S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1, z \geq 0\}.$$

Si supponga che S sia orientata prendendo in $(0, 0, 1)$ la normale in direzione $(0, 0, 1)$. Calcolare il flusso di F attraverso S .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.

Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ?????

1. Sia $f(x, y, z) = x + y + z$ e sia D il dominio di \mathbb{R}^3 definito da

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

- (a) Provare che $\sup_D f = +\infty$.
(b) Determinare $\inf_D f$ specificando se si tratta di minimo.

2. Siano

$$D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}, \quad D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y \leq 1/2\}.$$

Calcolare

$$\int_{D_1} y \, dx \, dy, \quad \int_{D_2} y \, dx \, dy.$$

3. Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

- (a) Mostrare che

$$\int_B \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dx \, dy = +\infty.$$

- (b) Stabilire se converge

$$\int_B \frac{y}{(x + y^2)^2} dx \, dy.$$

4. Sia γ la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t \sin t, t(\pi - t))$ con $0 \leq t \leq \pi$.

- (a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.
(b) Calcolare l'area del dominio racchiuso da γ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.