

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica
Prova in Itinere di Analisi Matematica 1
Pisa, 6 Aprile 2017

(Problemi da 3 punti)

1. Determinare una primitiva della funzione $\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

2. Calcolare

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} dx.$$

3. Determinare per quali valori del parametro reale positivo a si ha convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a} dx.$$

4. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da $x_0 = 2016$, $x_1 = 2017$, e

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 5x_n + 7^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare il limite di $7^{-n}x_n$.

(Problemi da 8 punti)

5. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} x^{18} \cos(x^{30}) dx.$$

6. (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy (precisando l'intervallo massimale di esistenza)

$$u' + \frac{u}{1+t} = \arctan t, \quad u(0) = 1.$$

(b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u'' + \frac{u'}{1+t} = 0.$$

(c) (Bonus question) Determinare se l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{u'}{1+t} = \arctan t$$

ammette soluzioni limitate per $t \geq 0$.

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} + \frac{a}{n}, \quad x_1 = \frac{1}{2017},$$

dove a è un parametro reale.

(a) Determinare, nel caso $a = 0$, il limite della successione.

(b) Dimostrare che, nel caso $a = 1/100$, la successione è definitivamente monotona.

(c) (Ultra bonus) Sempre nel caso $a = 1/100$, determinare il limite della successione $(x_n)^n$.