

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. (a) Calcolare

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x^2 y}{1 + x^4 + y^4}.$$

- (b) Stabilire per quali $\alpha > 0$ esiste

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x^2 y}{1 + |x|^\alpha + y^4}$$

ed in caso affermativo calcolarlo.

2. Siano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^4 \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ e $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$. Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo e calcolando anche gli eventuali punti di massimo/minimo.

3. Sia D il dominio di \mathbb{R}^2 definito da

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Calcolare $\text{area}(D)$.

4. Sia S la superficie di \mathbb{R}^3 definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1, z \geq 0\}$$

orientata prendendo in $(0, 0, 1)$ la normale con direzione $(0, 0, 1)$. Sia $F(x, y, z) = (x + y, e^{z^2}, -z + 1)$. Calcolare il flusso di F attraverso S (cioè $\int_S (F, \nu) d\sigma$).

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1\}$ e $f(x, y, z) = x^4 + y^2 - z$.
 - (a) Mostrare che D non è limitato.
 - (b) Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo e calcolando anche gli eventuali punti di massimo/minimo.
2. Sia V il solido definito da

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y \leq 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calcolare

$$\int_V (x - z) dx dy dz, \quad \int_V |x - z| dx dy dz.$$

3. Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

- (a) Provare che

$$\int_B \frac{\arctan(xy)}{(x+y)^4} dx dy < +\infty.$$

- (b) Stabilire per quali $\alpha > 0$ si ha

$$\int_B \frac{\arctan(xy)}{(x+y)^\alpha} dx dy < +\infty.$$

4. Sia γ la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t^2(\pi - t), \sin t)$ con $0 \leq t \leq \pi$.
 - (a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.
 - (b) Calcolare l'area del dominio racchiuso da γ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4 - x^2y^2$.
 - (a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f e classificarli.
 - (b) Determinare estremo superiore e inferiore di f su \mathbb{R}^2 precisando se si tratta di massimo e/o minimo.

2. Siano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 1, x \geq 1\}, \quad f(x, y) = \frac{y}{1 + x + y}.$$

Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo e calcolando anche gli eventuali punti di massimo/minimo.

3. (a) Sia V_1 il solido definito da

$$V_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq z, z \geq 0\}.$$

Determinare il volume di V_1 e le coordinate del suo baricentro.

- (b) Sia V_2 il solido definito da

$$V_2 := \{(x, y, z) \in V_1 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Determinare il volume di V_2 e le coordinate del suo baricentro.

4. Sia D il dominio di \mathbb{R}^2 racchiuso dalla curva $\gamma(t) = (t^2, t(\pi - t))$ con $0 \leq t \leq \pi$ e dall'asse delle x . Calcolare

$$\int_D x \, dx \, dy.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.