Consideriamo, al variare del parametro reale λ, la funzione $f_{\lambda}: R \rightarrow R$ definita da

$f_{\lambda}(x) = x - \arctan(\lambda x)$

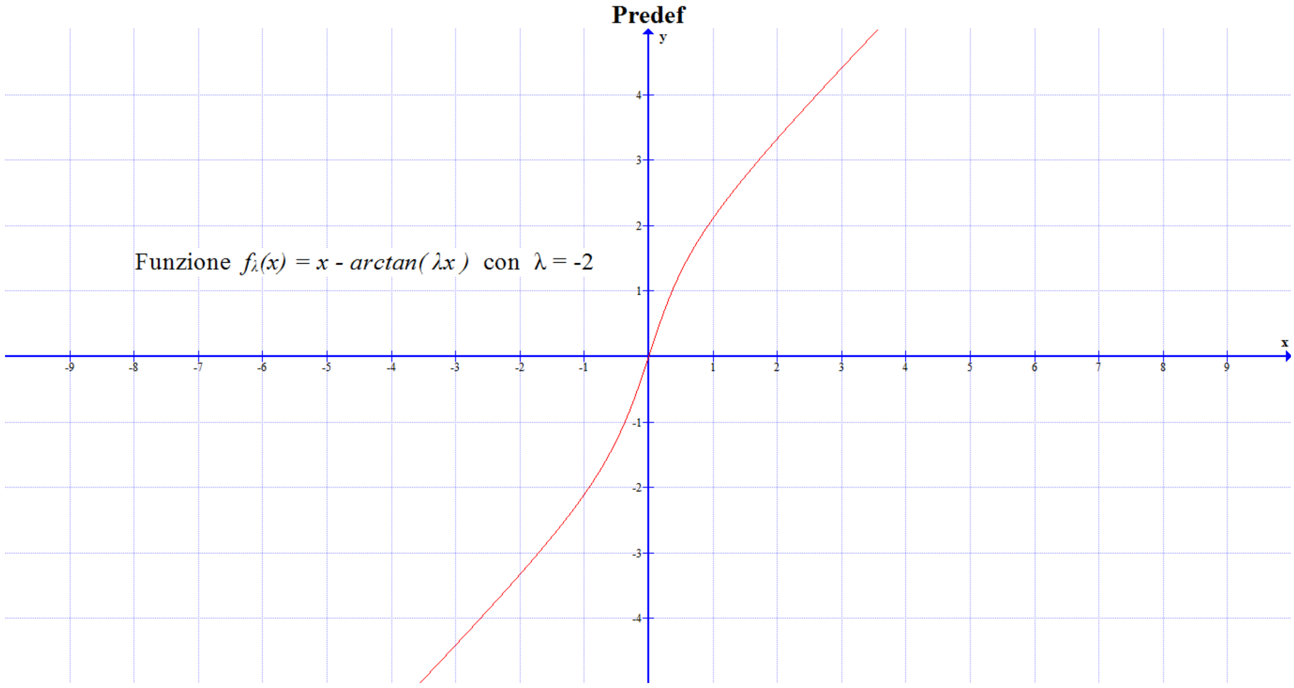
Determinare per quali valori del parametro λ la funzione risulta iniettiva e/o surgettiva.

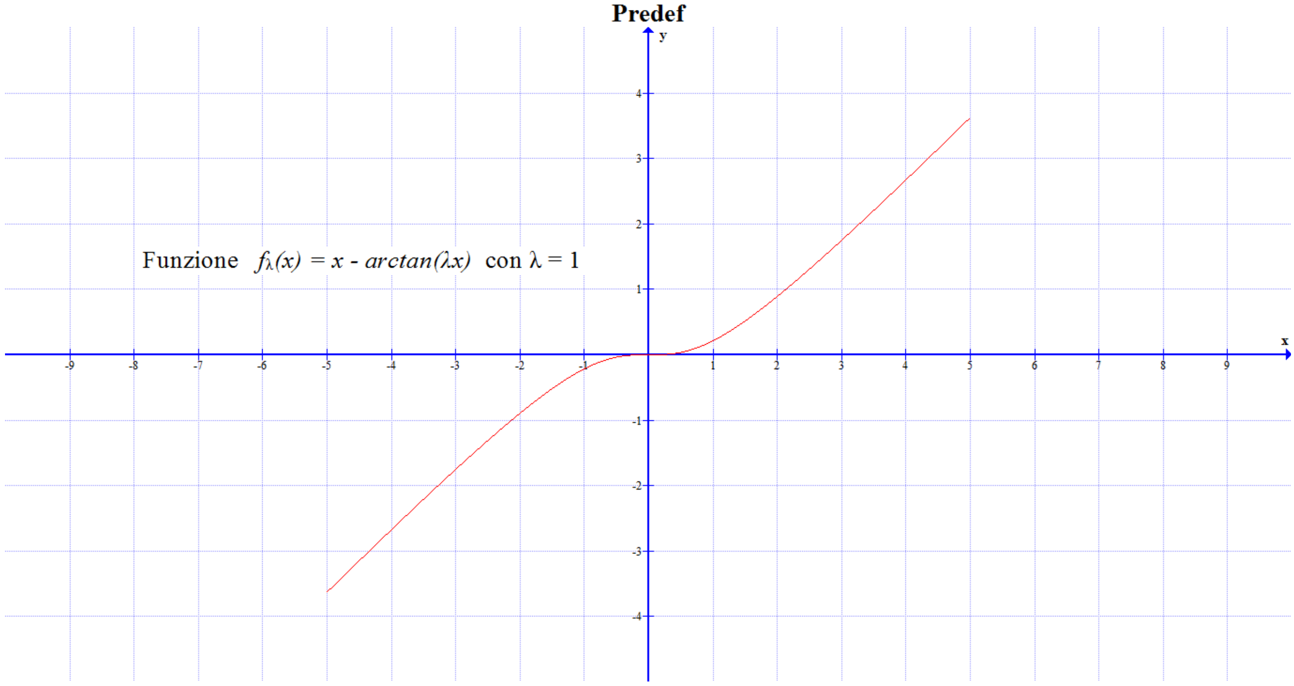
Essendo :

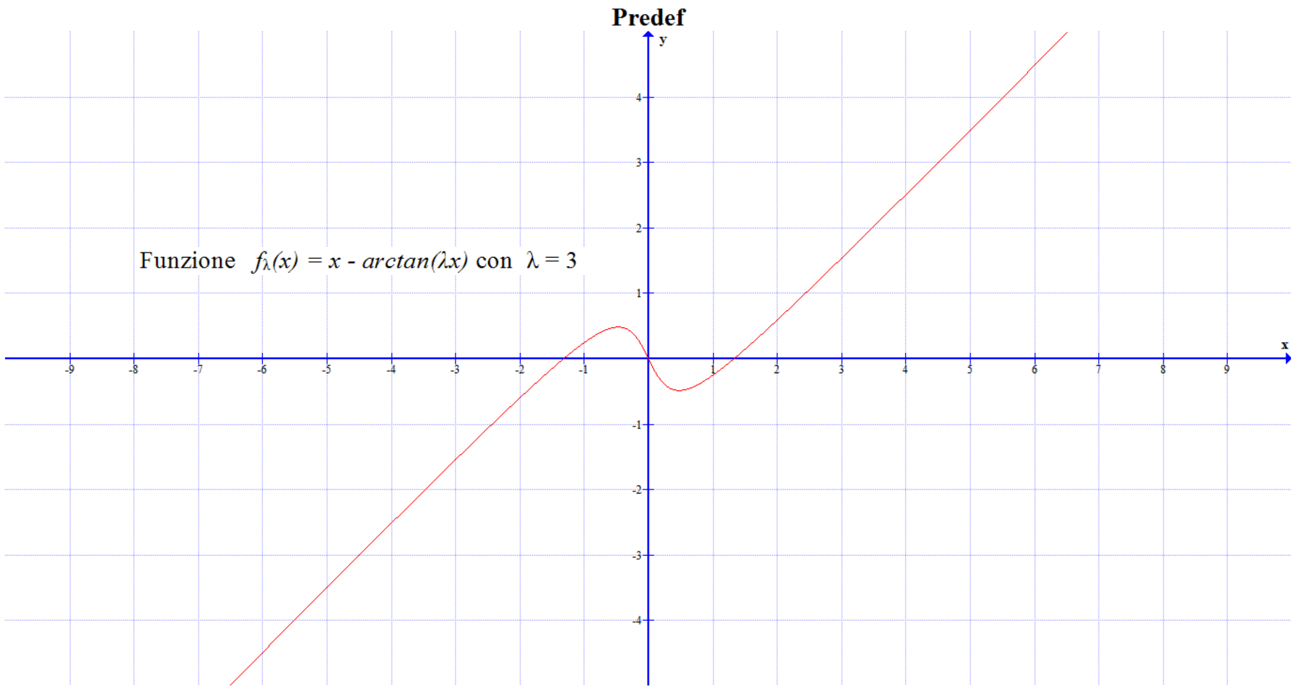
- $f_{\lambda}(x)$ continua per ogni $x \in R$
- limite per $x \rightarrow +\infty$ di $f_{\lambda}(x) = +\infty$
- limite per $x \rightarrow -\infty$ di $f_{\lambda}(x) = -\infty$

la funzione è surgettiva per ogni $\lambda \in R$

In prossimità di $x_0 = 0$ è $f_{\lambda}(x) = x - \lambda x + \frac{1}{3} \cdot (\lambda^3 \cdot x^3) + o(x^3) = (1-\lambda) \cdot x + \frac{\lambda^3 \cdot x^3}{3} + o(x^3)$







Essendo che, per $\lambda > 1$,

- $f_\lambda(0) = 0$
- $f_\lambda(x)$ è continua per ogni $x \geqslant 0$
- in un intorno destro di $x_0 = 0$ è $f_\lambda(x) < 0$
- limite per $x \to +\infty$ di $f_\lambda(x) = +\infty$

per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un altro punto $x_1 > 0$ in cui valgono le relazioni $f_\lambda(x_1) = f_\lambda(0) = 0$
Quindi, la funzione data non è iniettiva per $\lambda > 1$

Per $\lambda < 1$ è

$$f'_\lambda(x) = 1 - \frac{\lambda}{1+\lambda^2 \cdot x^2} = \frac{\lambda^2 \cdot x^2 + (1-\lambda)}{1+\lambda^2 \cdot x^2}$$

Dunque è $f'_\lambda(x) > 0$ se e solo se $\lambda^2 \cdot x^2 + (1-\lambda) > 0$, essendo $1+\lambda^2 \cdot x^2 > 0$ sempre.
Poiché è il determinante $\Delta = -4(1-\lambda)\lambda^2 < 0$, segue che l'espressione di secondo grado in x assume sempre il segno del coefficiente del termine di secondo grado e, quindi, è $f'_\lambda > 0$ sempre.
Pertanto è $f_\lambda(x)$ strettamente crescente e quindi iniettiva per $\lambda < 1$.

Per $\lambda = 1$ è

$$f'_\lambda(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$ da cui segue che $f'_\lambda(x) > 0$ per $x \neq 0$.

La derivata prima si annulla soltanto in $x_0 = 0$, dove la funzione presenta un flesso ascendente con tangente orizzontale.
Anche in questo caso $f_\lambda(x)$ è strettamente crescente (monotonia 3) e quindi iniettiva per $\lambda = 1$