BY GIMUSI 01/12/16

Provare che se $f \in C^2(\mathbb{R})$ è tale che

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(0) = -1$$

allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x = e^{-a^2/2}$$

$$\left[f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right]^x = e^{x \log f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)}$$

SVILUPPO DI TAYLOR DI ORDINE 2

$$f(z) = f(0) + f'(0) \cdot z + \frac{1}{2} f''(0) z^2 + o(z^2) \qquad z \to 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{x}} \to 0 \qquad x \to +\infty$$

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = 1 + 0 \cdot \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}(-1)\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\log f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{a^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\left[f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right]^x = e^{x \log f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)} = e^{-\frac{1}{2}a^2 + o(1)} \to e^{-\frac{1}{2}a^2}$$