Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 24 Novembre 2016

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x) = 2^{|x-1|}$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Calcolare l'immagine e la controimmagine di $[0, 2)$.

2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\cosh(3n)}$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 10, con centro nell'origine, della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\log(1 - x^3)\right).$$

4. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n^3}{n^a},$$

   dove a è un parametro reale positivo.

   Determinare per quali valori del parametro si ha convergenza e per quali valori si ha assoluta convergenza.

(Problemi da 8 punti)

5. Determinare ordine di infinitesimo e parte principale della successione

$$\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n}.$$

6. Consideriamo, al variare del parametro reale λ, la funzione $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\lambda(x) = x - \arctan(\lambda x).$$

   Determinare per quali valori del parametro la funzione risulta iniettiva e/o surgettiva.

7. Consideriamo l'equazione

$$x^5 - x\log(1 + x^2) + \sin(x^4) = n.$$

   (a) Dimostrare che per $n = 0$ l'equazione ammette almeno tre soluzioni.

   (b) Dimostrare che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che l'equazione ammette una soluzione unica x_n per ogni $n \geq n_0$.

   (c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza della serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n - n^a)^2.$$