BY GIMUSI 26/10/16



# Funzioni – Esercizi Teorici 3

**Argomenti:** proprietà qualitative di funzioni reali **Difficoltà:** ⋆⋆⋆

**Prerequisiti:** proprietà di monotonia, funzioni periodiche

1. (a) Cosa possiamo dire della somma di due funzioni strettamente crescenti/decrescenti?
   (b) Cosa possiamo dire del prodotto di due funzioni strettamente crescenti/decrescenti? E se aggiungiamo l'ipotesi che siano positive/negative?
   (c) Cosa possiamo dire della composizione di due funzioni strettamente monotone (ci sono quattro casi)? E della composizione di due funzioni debolmente monotone?

2. (Monotonia, iniettività, surgettività)
   (a) Dimostrare che una funzione strettamente monotona è iniettiva (precisare da dove a dove ...).
   (b) Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia strettamente crescente ma non surgettiva.
   (c) Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia iniettiva ma non monotona.

3. Nella seguente tabella vengono presentate quattro implicazioni. Discutere, al variare delle ipotesi di monotonia su $f$, se tali implicazioni sono vere o false per ogni funzione ed ogni valore di $x$ e $y$. Ovviamente quando sono vere occorre trovare una dimostrazione, quando sono false un controesempio.

| Implicazione | Deb. cresc. | Strett. cresc. | Deb. decr. | Strett. decr. |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) > f(y) \Rightarrow x > y$ | | | | |
| $f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$ | | | | |
| $f(x) > f(y) \Rightarrow x < y$ | | | | |
| $f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \leq y$ | | | | |

4. (a) Dimostrare che l'insieme dei periodi di una funzione periodica (includendo anche il periodo nullo e quelli negativi) è un sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ (modo raffinato di dire che la somma di due periodi è ancora un periodo).
   (b) Siano $f$ e $g$ due funzioni periodiche con periodi $T_f$ e $T_g$, rispettivamente. Dimostrare che, se $T_f/T_g \in \mathbb{Q}$, allora le funzioni $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono periodiche. Possiamo dire qualcosa del loro periodo minimo?
   (c) Trovare una funzione periodica non costante per cui non esiste un minimo periodo.

5. (Di solito è facile convincersi che una funzione non è periodica, ma dimostrarlo formalmente può non essere affatto semplice)

   Dimostrare per bene che le seguenti funzioni non sono periodiche:

$$\arctan x, \qquad \sin 2^x, \qquad \sin|x|, \qquad \sin x^2, \qquad \sin x + \sin(\sqrt{2}\,x).$$



1/7

1. (a) Cosa possiamo dire della somma di due funzioni strettamente crescenti/decrescenti?
   (b) Cosa possiamo dire del prodotto di due funzioni strettamente crescenti/decrescenti? E se aggiungiamo l'ipotesi che siano positive/negative?
   (c) Cosa possiamo dire della composizione di due funzioni strettamente monotone (ci sono quattro casi)? E della composizione di due funzioni debolmente monotone?

(a) SIANO $f : A \to B$ $\quad g : A \to B$

DUE FUNZIONI STRETTAMENTE CRESCENTI / DECRESCENTI

$\forall x, y \in A \quad x > y \qquad f(x) \gtrless f(y) \qquad g(x) \gtrless g(y)$

$s(x) := f(x) + g(x)$ É STRETT. CRESCENTE/DECRESCENTE

INFATTI

$\forall x, y \in A \quad x > y \qquad s(x) = f(x) + g(x) > f(y) + g(y) = s(y)$

(b) $s(x) := \pm f(x) \cdot \pm g(x)$

| | $f$ | $g$ | $s = f \cdot g$ |
|---|---|---|---|
| 1) | SC + | SC + | SC + |
| 2) | SC − | SC − | SD + |
| 3) | SC + | SC − | ? − |
| 4) | SD + | SD + | SD + |
| 5) | SD − | SD − | SC + |
| 6) | SD + | SD − | ? − |

| | $f$ | $g$ | $s = f \cdot g$ |
|---|---|---|---|
| 7) | SC $\pm$ | SD $\pm$ | ? + |
| 8) | SC $\pm$ | SD $\mp$ | SD − |

1) $f(x) > f(y) \qquad g(x) > g(y) \implies s(x) = f(x) \cdot g(x) > f(y) \cdot g(y) = s(y)$

2) $-f(x) > -f(y) \qquad -g(x) > -g(y) \implies f(x) < f(y) \qquad g(x) < g(y)$
$\implies s(x) = f(x) \cdot g(x) < f(y) \cdot g(y) = s(y)$

3) $f(x) > f(y) \qquad -g(x) > -g(y)$

4) $\equiv$ 1) $\qquad$ 5) $\equiv$ 2) $\qquad$ 6) $\equiv$ 3) $\qquad$ 7) $\simeq$ 3) $\qquad$ 8) $\simeq$ 1)

(c) $h = f \circ g = f(g(x))$

| | $f$ | $g$ | $h = f \circ g$ |
|---|---|---|---|
| 1) | SC | SC | SC |
| 2) | SC | SD | SD |
| 3) | SD | SC | SD |
| 4) | SD | SD | SC |

1) $x > y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow f(g(x)) > f(g(y))$

2) $x > y \Rightarrow g(x) < g(y) \Rightarrow f(g(x)) < f(g(y))$

3) $x > y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow f(g(x)) < f(g(y))$

4) $x > y \Rightarrow g(x) < g(y) \Rightarrow f(g(x)) > f(g(y))$

| | $f$ | $g$ | $h = f \circ g$ |
|---|---|---|---|
| 5) | C | C | C |
| 6) | C | D | D |
| 7) | D | C | D |
| 8) | D | D | C |

5) $x \geq y \Rightarrow g(x) \geq g(y) \Rightarrow f(g(x)) \geq f(g(y))$

6) $x \geq y \Rightarrow g(x) \leq g(y) \Rightarrow f(g(x)) \leq f(g(y))$

7) $x \geq y \Rightarrow g(x) \geq g(y) \Rightarrow f(g(x)) \leq f(g(y))$

8) $x \geq y \Rightarrow g(x) \leq g(y) \Rightarrow f(g(x)) \geq f(g(y))$

2. (Monotonia, iniettività, surgettività)

(a) Dimostrare che una funzione strettamente monotona è iniettiva (precisare da dove a dove ...).

(b) Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia strettamente crescente ma non surgettiva.

(c) Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia iniettiva ma non monotona.

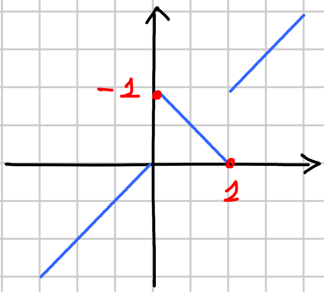
(a) SIA $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ STRETTAMENTE MONOTONA

$\forall x, y \in A \quad x > y \Rightarrow f(x) \gtrless f(y)$

$\rightsquigarrow \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \rightsquigarrow$ $f$ È INIETTIVA

(b) $f(x) = \text{ARCTAN}(x)$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} x & \forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 1 - x & \forall x \in (-1, 1) \end{cases}$$




3. Nella seguente tabella vengono presentate quattro implicazioni. Discutere, al variare delle ipotesi di monotonia su $f$, se tali implicazioni sono vere o false per ogni funzione ed ogni valore di $x$ e $y$. Ovviamente quando sono vere occorre trovare una dimostrazione, quando sono false un controesempio.

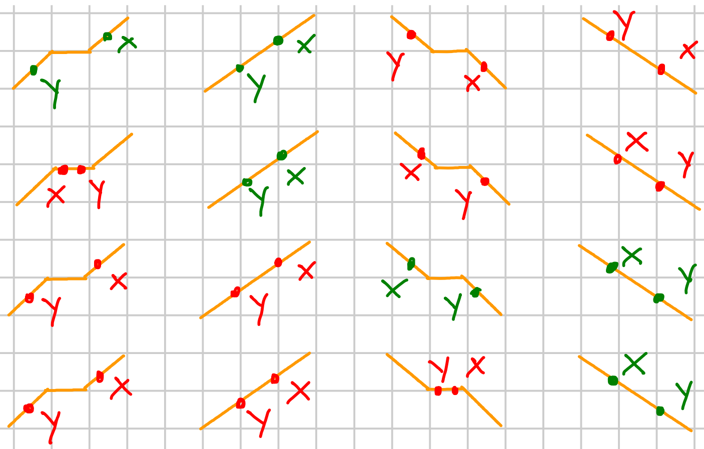
| | Implicazione | Deb. cresc. | Strett. cresc. | Deb. decr. | Strett. decr. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | $f(x) > f(y) \Rightarrow x > y$ | V | V | F | F |
| 2) | $f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$ | F | V | F | F |
| 3) | $f(x) > f(y) \Rightarrow x < y$ | F | F | V | V |
| 4) | $f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \leq y$ | F | F | F | V |

1)

2)

3)

4)



4. (a) Dimostrare che l'insieme dei periodi di una funzione periodica (includendo anche il periodo nullo e quelli negativi) è un sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ (modo raffinato di dire che la somma di due periodi è ancora un periodo).

(b) Siano $f$ e $g$ due funzioni periodiche con periodi $T_f$ e $T_g$, rispettivamente. Dimostrare che, se $T_f/T_g \in \mathbb{Q}$, allora le funzioni $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono periodiche. Possiamo dire qualcosa del loro periodo minimo?

(c) Trovare una funzione periodica non costante per cui non esiste un minimo periodo.

(a) $\tau_f = \{ T \in \mathbb{R} : f(x) = f(x+T) \}$

SIANO $T_1, T_2 \in \tau_f \Rightarrow f(x+T_1+T_2) = f(x+T_2) = f(x)$

$\Rightarrow (T_1 + T_2) \in \tau_f$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(x \pm T_f)$, $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = g(x \pm T_g)$

SIA $T_f/T_g = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ E $T_s = nT_f = mT_g$

$s(x+T_s) = f(x+T_s) \pm g(x+T_s) = f(x+nT_f) \pm$

$\pm g(x+mT_g) = f(x) \pm g(x) = s(x)$ $\blacksquare$

$T_{s,MIN}$ PER $(n,m)=1$ CON $T_f$ E $T_g$ MINIMI PER $f$ E $g$

(c)

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{SE } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x = K \cdot 10^m \quad \text{CON } K, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

5. (Di solito è facile convincersi che una funzione non è periodica, ma dimostrarlo formalmente può non essere affatto semplice)

Dimostrare per bene che le seguenti funzioni non sono periodiche:

a) $\arctan x$, b) $\sin 2^x$, c) $\sin|x|$, d) $\sin x^2$, e) $\sin x + \sin(\sqrt{2}\,x)$.

(a) ARCTAN X NON È PERIODICA INFATTI $\forall T > 0$

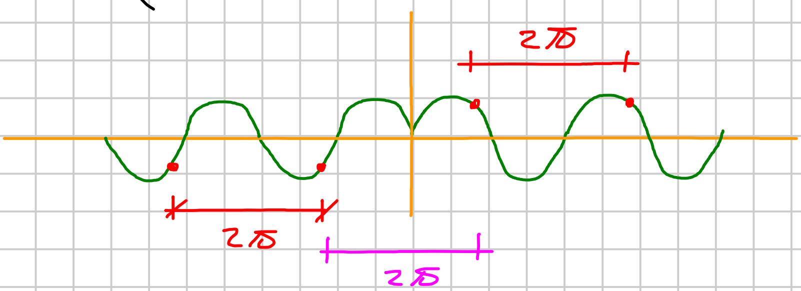
$\arctan(x+T) > \arctan(x)$

(b) T È UN PERIODO PER $\sin 2^x \iff$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{Z}\quad 2^{x+T} = 2^x + 2n\pi \qquad 2^T = 1 + \frac{2n\pi}{2^x}$

$T = \log_2\left(1 + \frac{2n\pi}{2^x}\right) \rightsquigarrow T = T(x)$ ▨

(c) $\sin|x| = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ \sin(-x) = -\sin x & x \leq 0 \end{cases}$




CIASCUN "RAMO" HA PERIODO MINIMO $2\pi$ MA PER

$x < 0$ E $x + 2n\pi \geq 0$ SI HA

$-\sin(x) \neq \sin(x+2n\pi) = \sin x$

(d) T È UN PERIODO PER $\sin(x^2) \iff \forall x \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{Z}$

$(x+T)^2 = x^2 + 2n\pi \qquad \cancel{x^2} + 2xT + T^2 = \cancel{x^2} + 2n\pi$

$T^2 + 2xT - 2n\pi = 0 \qquad T = \frac{-2x + \sqrt{4x^2 + 8n\pi}}{2} =$

$= -x + \sqrt{x^2 + 2n\pi} \rightsquigarrow T = T(x)$ ▨

(e) $\sin x + \sin\sqrt{2}x$

$$\begin{cases} \sin x \quad \text{HA PERIODO} \quad T_1 = 2n_1\pi \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z} \\ \sin\sqrt{2}x \quad \text{HA PERIODO} \quad \sqrt{2}(x+T_2) = \sqrt{2}x + 2n_2\pi \end{cases}$$

$$T_2 = \sqrt{2}n_2\pi \quad \forall n_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x+T) + \sin\sqrt{2}(x+T) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad T = 2n_1\pi = \sqrt{2}n_2\pi \qquad n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}n_2 \quad \blacksquare$$