Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 28 Giugno 2016

1. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = x^2y^6 + \arctan(x^2y).$$
   (a) Determinare i punti stazionari di $f(x,y)$, specificando se si tratta di punti di massimo/minimo locale/globale.

   (b) Determinare l'estremo inferiore di $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$, precisando se si tratta di minimo.

2. Consideriamo gli insiemi
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 7\right\}, \qquad B = [0,+\infty) \times [0,+\infty).$$
   Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza degli integrali
$$\int_A \frac{x^a \arctan y}{x^6+y^6}\,dx\,dy, \qquad \int_B \frac{x^a \arctan y}{x^6+y^6}\,dx\,dy.$$

3. Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} n(x^3+y) = xy, \\ x - yx^2 + \arctan \dfrac{1}{n} = 0, \end{cases}$$
   dove n è un intero positivo.

   (a) Dimostrare che per n sufficientemente grande esiste almeno una soluzione.

   (b) (Bonus question) Dimostrare che per n sufficientemente grande la soluzione è unica.

   (c) Studiare la convergenza delle serie $\sum x_n$ e $\sum y_n$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{\arctan(u-t)}{u}, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Studiare l'esistenza globale nel passato per le soluzioni con $\alpha > 0$.

   (b) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione non è globale nel futuro.

   (c) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro.

   (d) Determinare se esiste $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale nel passato o nel futuro.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.