Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 7 Giugno 2016

19/06/2016

1. Determinare estremo inferiore/superiore della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{1 + x^4 + y^4}$$

al variare di (x,y) in $\mathbb{R}^2$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

① Osservo che $f(x,-y) = f(-x,y) = -f(x,y)$, cioè $f(x,y)$ è dispari nelle due variabili, quindi $\inf = -\sup$ e posso limitarmi a studiare nel 1° quadrante (anzi a $x>0$ e $y>0$)

② Nel primo quadrante vale

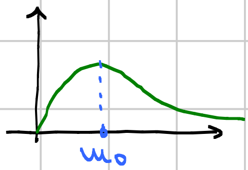
$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{1+x^4+y^4} \leq \frac{x^3 y}{x^4+y^4} =: g(x,y)$$

(la disug. è stretta per $x>0$ e $y>0$)

quindi $\sup f \leq \sup g$.

③ La funzione $g(x,y)$ è omogenea, quindi basta studiarla sulle rette $y = mx$ dove vale

$$\gamma(m) := \frac{m}{1+m^4}$$



Studiare $\gamma(m)$ e trovarne il max è semplice analisi 1. Così si trova $\sup g$ (che è anche max) e quindi $\sup f \leq \gamma(m_0) = \frac{\sqrt[4]{27}}{4}$

④ Detto m_0 il p.to di max di $\gamma(m)$, basta osservare che

$$\lim_{t \to +\infty} f(t, m_0 t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^4 m_0}{1 + t^4(1+m_0^4)} = \gamma(m_0)$$

da cui si deduce che $\sup f = \gamma(m_0)$. Ovviamente non è max perché la disug. tra f e g è sempre stretta per $x>0$ e $y>0$.

—o—o—

Approcci alternativi

① Come prima si osserva che $\inf = -\sup$ e che il sup basta farlo per $x>0$ e $y>0$. Ora

$$\sup\{f(x,y) : x>0, y>0\} = \sup_{m\in\mathbb{R}} \sup\{f(x,mx) : x>0\}$$

cioè il sup sul 1° quadrante è il sup dei sup sulle varie rette uscenti dall'origine. Il sup a m fisso si ottiene studiando

$$f(x,mx) = \frac{m x^4}{1+(1+m^4)x^4}$$ e con un po' di analisi 1 si vede la monotonia

in x, quindi il sup è assunto all'infinito e vale $\frac{m}{1+m^4}$. Ora è come prima.

② L'approccio precedente funziona anche usando le coord. polari. Si ottiene

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}{1+\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}.$$ Questo a θ fisso è monotona

in ρ, quindi il suo sup è assunto all'infinito e vale $\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$.
Dividendo sopra/sotto per $\cos^4\theta$ e ponendo $m=\tan\theta$ ritroviamo $\gamma(m)$.

③ Trovare il max di $g(x,y)$ è equivalente, essendo g omogenea, a trovare $\max\{x^3y : x^4+y^4=1\}$, cosa che viene bene con i moltiplicatori.

④ Approccio elegante (by Matteo Migliorini). Dopo essersi ridotti come sempre al 1° quadrante, basta applicare AM-GM con $\frac{x^4}{3}, \frac{x^4}{3}, \frac{x^4}{3}, y^4$ e ottenere che

$$x^3y \le \frac{\sqrt[4]{27}}{4}(x^4+y^4)$$

e quindi

$$f(x,y) \le \frac{\sqrt[4]{27}}{4}\,\frac{x^4+y^4}{1+x^4+y^4} \le \frac{\sqrt[4]{27}}{4}.$$

Per la disug. opposta basta scegliere $\frac{x^4}{3}=y^4$ e far tendere $x\to+\infty$.

2. Consideriamo l'insieme

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y+z=4\}.$$

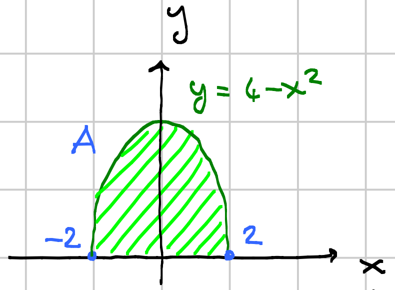
(a) Verificare che S è una superficie connessa.

(b) Scrivere una parametrizzazione di ∂S.

(c) Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x+y, -2y+z, x+z)$$

attraverso la superficie S orientata prendendo nel punto $(2,0,0)$ il vettore normale che punta verso le x negative.



① La sup. S può essere parametrizzata come grafico

$S = \{(x,y,4-x^2-y) : (x,y) \in A\}$ con

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ 4-x^2-y \geq 0\}$

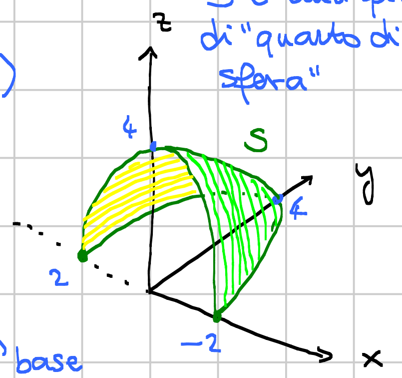
Essendo A connesso (per archi) anche S sarà connessa (per archi), visto che la parametrizzazione ovviamente è continua.

② ∂S è costituito dai p.ti di S con $y=0$ oppure $z=0$. Sono 2 curve:

$(t,0,4-t^2)$ con $t \in [-2,2]$ (pezzo con $y=0$)

$(t,4-t^2,0)$ con $t \in [-2,2]$ (pezzo con $z=0$)

S è una specie di "quarto di sfera"



③ Aggiungo ad S i due "tappi"

parete verticale

$S_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-2,2],\ y=0,\ 0 \leq z \leq 4-x^2\}$

$S_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-2,2],\ 0 \leq y \leq 4-x^2,\ z=0\}$ base

ed applico il teo. della divergenza nella regione V di spazio delimitata da S, S_1, S_2. Ottengo

$$\int_V \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{=0}\, dx\, dy\, dz = \int_{S_1} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle + \int_{S_2} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle + \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

dove $\vec{n}$ è la normale esterna a V (cioè il contrario di quello che serve).

Essendo $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ otteniamo

$$\text{Flusso richiesto} = -\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}$$

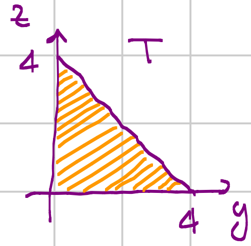
Ora

$$\int_{S_2} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = \int_{S_2} \langle \vec{F}, (0,0,-1) \rangle = \int_{S_2} (x + \overset{0}{\overset{\parallel}{z}}) = \int_{S_2} x = 0 \quad \text{per simmetria}$$

$$\int_{S_1} \langle \hat{F}, \vec{n} \rangle = \int_{S_1} \langle \vec{F}, (0,-1,0) \rangle = \int_{S_1} (\overset{0}{\overset{\parallel}{2y}} - z) = -\int_{S_1} z$$

$$= -\int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} z\, dz = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (4-x^2)^2\, dx = \text{si fa...} = -\frac{256}{15}.$$

Approcci alternativi



(a) si può vedere S come unione di due grafici

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in T \,, \; x = \pm\sqrt{4-y-z}\} \text{ con}$$

In questo modo S è unione di 2 connessi con un pto in comune, quindi è connessa.

In alternativa, si può mostrare "con le mani" che S è connessa per archi congiungendo ogni p.to con un punto della parabola corrispondente a $y=0$ oppure $z=0$.

(b) Scritta la param. di S come grafico come nella sol. precedente, basta fare l'immagine dei due pezzi del bordo di A (segmento e parabola)

(c) Per il calcolo del flusso funzionano tutte e 4 le strategie classiche. Fare la verifica che portino agli stessi risultati è un buon esercizio. Oltre a quella già indicata, le altre strategie sono le seguenti.

- Osservato che $\operatorname{div} F = 0$, si può sostituire S con una sup. che abbia lo stesso bordo e sia più semplice. Ovviamente la scelta cade sui tappi S_1 ed S_2 ed il conto è lo stesso di prima.
- Scritta S in forma parametrica come nella domanda (a), basta applicare la definizione di flusso...
- Osservato che $\operatorname{div} F = 0$, non è difficile trovare esplicitamente un campo E tale che $\operatorname{rot} E = F$. A quel punto per Stokes basta calcolare la circuitazione di E lungo ∂S percorsa opportunamente.

Achtung! Indipendentemente dall'approccio, nel calcolo del flusso occorre prestare attenzione a queste cose

→ l'orientazione

→ l'orientazione

→ l'orientazione

→ "

→ "

3. Consideriamo la successione di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\arctan\left(\frac{x}{n^{1+x}}\right)}}_{f_n(x)}.$$

(a) Dimostrare che la serie definisce una funzione continua $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.

(b) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

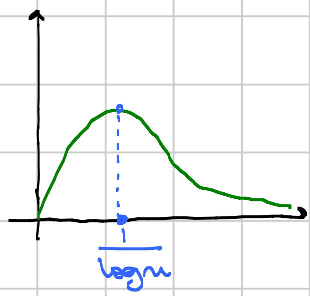
(a) Basta dim. che la serie converge unif. in $[A,B]$ per ogni $0<A<B$.
Ora

$$f_n(x) \le \frac{x}{n^{1+x}} \le \frac{B}{n^{1+A}} \qquad \forall x \in [A,B]$$

Poiché $\sum \frac{B}{n^{1+A}}$ converge, si ha conv. totale, dunque unif.

(b) Dimostriamo che la serie converge totalmente, dunque unif., su $[A,+\infty)$ per ogni $A>0$. A quel p.to per il limite per $x\to+\infty$ potremo usare il teo. di scambio, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^{1+x}}\right)}_{=\frac{\pi}{2} \text{ se } n=1 \text{ e } 0 \text{ altrimenti}} = \frac{\pi}{2}$$



Per la conv. totale, studiando le $f_n(x)$ si vede che sono fatte come in figura, cioè con max in $x = \frac{1}{\log n}$ e decrescenti dopo. Quindi, fissato $A>0$, avremo

$$\sup\{f_n(x) : x \ge A\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{appena } \frac{1}{\log n} \le A}}{=} f_n(A) = \arctan\frac{A}{n^{1+A}}$$

da cui la conv. totale.

($\lim x\to 0^+$) Se non ci fosse arctan, dal confronto serie-integrali (che possiamo utilizzare grazie alla monotonia in n) otterremmo che

$$\frac{1}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{1+x}}\,dy \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \le 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{1+x}}\,dy = 1+\frac{1}{x}$$

e quindi

$$1 \le \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{1+x}}}}_{\to 1 \text{ per carabinieri}} \le x+1$$

Per l'arctan basta utilizzare le disug. classiche

$$y - \frac{1}{3}y^3 \leq \arctan y \leq y \qquad \forall y \geq 0$$

per avere che

$$\underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{1+x}}}}_{\downarrow\, 1} - \frac{1}{3}\underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{n^{3+3x}}}}_{\downarrow\, 0} \leq f(x) \leq \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{1+x}}}}_{\downarrow\, 1}$$

Il fatto che la serie con i cubi tenda a 0 per $x \to 0^+$ segue banalmente dalla sua conv. totale in $[0,1]$ (grazie a n^3 al denomin.), il che permette di applicare il teo. di scambio.

—o—o—

<u>Osservazione</u> Il fatto che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ci dice che a 0^+ non vale il teo. di scambio, quindi non può esserci conv. unif. in $[0,1]$, quindi nemmeno totale.

—o—o—

<u>Approccio alternativo</u> Nel calcolo del lim per $x \to 0^+$, si poteva far fuori arctan anche con questo ragionamento.

Dato $\varepsilon > 0$, trovo $y_\varepsilon > 0$ tale che $\arctan y \geq (1-\varepsilon) y$ per ogni $y \in [0, y_\varepsilon]$.

Ora osservo che

$$\frac{x}{n^{1+x}} \leq \frac{x}{n} \leq x \leq y_\varepsilon \qquad \forall n \geq 1, \ \forall x \in (0, y_\varepsilon)$$

quindi

$$f_n(x) \geq (1-\varepsilon) \frac{x}{n^{1+x}} \qquad \forall n \geq 1, \ \forall x \in (0, y_\varepsilon). \qquad (*)$$

Facendo la serie e passando al limite si ottiene

$$\liminf_{x \to 0^+} f(x) \geq (1-\varepsilon) \lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{1+x}} = (1-\varepsilon)$$

e da qui si chiude per l'arbitrarietà di ε.

È importante aver ottenuto la $(*)$ in un intervallo di ampiezza indipendente da n.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

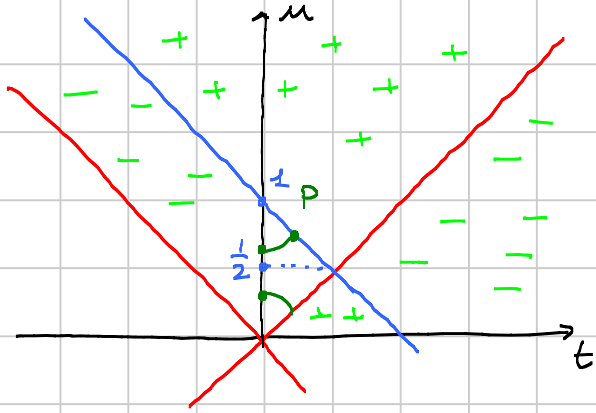
$$u' = \frac{\log(u+t)}{\arctan(u-t)}, \qquad u(0)=\alpha.$$

(a) Dimostrare che esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione non è globale.

(b) Determinare se esiste $\alpha \in (0,1)$ per cui la soluzione è globale (sia nel passato, sia nel futuro).

(c) (Bonus question) Nel caso $\alpha = 2016$, studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u(t)}\,dt.$$



(a) La "situazione segni" è riportata in figura.
È evidente che le soluzioni con $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$, decrescendo per $t>0$, dovranno incontrare la retta $u=t$ in un tempo $<\frac{1}{2}$. Avremo così break down.
[Superformale: $u(t)\equiv \frac{1}{2}$ è soprasoluzione (banale verifica)]

(b) Considero una qualunque soluzione passante per un p.to P come in fig., cioè con $u(t_0)=1-t_0$ per qualche $t_0\in(\frac{1}{2},1)$.
"Tornando indietro" questa soluzione incontrerà l'asse verticale in un valore $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$. Dico che tale soluzione è globale nel passato e nel futuro.

- Passato: non può incontrare la retta $u=-t$ (dovrebbe farlo con deriv. $-\infty$, quindi da sotto) e non può incontrare la retta $u=1-t$ (dovrebbe farlo con deriv. $=0$, quindi da sopra). Questo esclude BD e BU.
[formalmente: la retta $u=1-t$ è sottosoluzione (banale verifica) e la retta $u=-t+\varepsilon$ è soprasoluzione (verifica semplice, anche se non banale]
- Futuro Non può incontrare la retta $u=t$ (dovrebbe farlo con derivata $+\infty$, quindi "da sotto") e questo esclude il break down.

Formalmente, consideriamo $v(t)=t+\varepsilon$ e osserviamo che è sottosoluz. $\Longleftrightarrow$

$$v'(t)=1 \le \frac{\log(2t+\varepsilon)}{\arctan\varepsilon}$$

Questa è vera per ogni $t\geq 1$ purché ε sia abbastanza piccolo

Per escludere il blow up basta osservare che il RHS cresce troppo poco. Una volta che sappiamo che $u(t)\geq t+\varepsilon$ per un opportuno $\varepsilon>0$, basta osservare che

sublinearità

$$\left|\frac{\log(u+t)}{\arctan(u-t)}\right| \le \frac{1}{\arctan\varepsilon}\,|\log(u+t)| \le \boxed{\frac{|u|+|t|}{\arctan\varepsilon}}$$

(c) L'idea è mostrare che la soluzione è $O(t \log t)$, quindi

$$\frac{1}{u(t)} \geq \frac{c}{t \log t}$$, il che porta alla divergenza dell'integrale.

Serve quindi una stima dall'alto per $u(t)$. Sarebbe quindi bello dimostrare che $v(t) = t + k t \log t$ è soprasoluzione.

<u>Lemma</u> $\exists k_0 > 0 \; \exists t_0 > 0$ t.c.

$$\log(2t + kt\log t) \leq (k+1+k\log t)\arctan(kt\log t) \qquad \forall t \geq t_0 \; \forall k \geq k_0$$

$\boxed{\text{Dim}}$ $\log(2t + kt\log t) \underset{\uparrow \, t \text{ grande}}{\leq} \log(2t^2 + kt^2) \underset{\uparrow \, \text{precorso}}{=} \log(k+2) + 2\log t$

$\underset{\uparrow \, k \text{ grande}}{\leq} k+1+k\log t \underset{\uparrow \, kt\log t \text{ grande}}{\leq} (k+1+k\log t)\arctan(kt\log t)$ $\square$

Dal lemma segue che

$$v'(t) = k+1+k\log t \geq \frac{\log(2t+kt\log t)}{\arctan(kt\log t)} = \frac{\log(t+v)}{\arctan(v-t)}$$

e quindi $v(t)$ è soprasoluzione per ogni $k \geq k_0$ e per ogni $t \geq t_0$.
Basta ora prendere t_0 e scegliere $k_1 \geq k_0$ tale che $u(t_0) \leq t_0 + k_1 t_0 \log t_0$ e avremo che

$$u(t) \leq t + k_1 t \log t \qquad \forall t \geq t_0$$

da cui $u(t) = O(t \log t)$.

— o — o —

<u>Oss.</u> Tira aria di "effetto soglia": esistono $\alpha \in (0,1)$ per cui si ha BD ed $\alpha \in (0,1)$ per cui si ha esistenza globale.
Cosa accade in mezzo?

<u>Oss.</u> Raffinando il ragionamento precedente si può dimostrare che $u(t) \sim \frac{2}{\pi} t \log t$ per tutte le soluz. che esistono globali nel futuro.

— o — o —

Approccio alternativo alla bonus question (from Dario Ascari, simplified)

Supponiamo di sapere già che $u(t)$ esiste globalmente e soddisfa

$$u(t) \geq t + \varepsilon \qquad \forall t \geq 0$$

per un certo $\varepsilon > 0$.

Allora

$$0 < u'(t) = \frac{\log(u+t)}{\arctan(u-t)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \log(u+t) \underset{u \geq t}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \log(2u)$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u(t)}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{u'(t)}{u(t)\, u'(t)}\, dt \underset{\text{stimo denom.}}{\geq} \varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{u'(t)}{u(t) \log u(t)}\, dt$$

$$\underset{\substack{y = u(t) \\ dy = u'(t)\, dt}}{=} \varepsilon \int_{2016}^{+\infty} \frac{dy}{y \log y} = +\infty$$

— o — o —