Estendo $F(x,y)$ a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (piano proiettivo reale)

considerandolo come $\mathbb{R}\ \cup$ "la circonferenza di raggio infinito".

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è compatto.

$$\nabla_F = 0 \iff \begin{cases} 3x^2y(1+x^4+y^4) = 4x^6y \\ x^3(1+x^4+y^4) = 4x^3y^4 \end{cases} \iff$$

$$\iff x=0 \ \vee \ x^4 = 3y^4$$

I p.ti stazionari interni sono quelli del tipo $(0,t)$, $(t,\sqrt[4]{3}\,t)$, $(t,-\sqrt[4]{3}\,t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$

$$F(0,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$F(t,-\sqrt[4]{3}\,t) = -\sqrt[4]{3} \cdot \frac{t^4}{1+4t^4}$$

$$F(t,\sqrt[4]{3}\,t) = \sqrt[4]{3}\ \frac{t^4}{1+4t^4}$$

Notando che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t,-\sqrt[4]{3}\,t) = -\frac{\sqrt[4]{3}}{4} < -\sqrt[4]{3}\ \frac{t^4}{1+4t^4} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to+\infty} F(t,\sqrt[4]{3}\,t) = \frac{\sqrt[4]{3}}{4} > \sqrt[4]{3}\ \frac{t^4}{1+4t^4} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Si vede che i p.ti di max/min si trovano sul bordo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, quindi relativamente a $\mathbb{R}$ saranno sup e inf.

Passando in coordinate polari posso descrivere la funzione sul bordo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{\rho^4 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta}{1 + \rho^4 \cos^4\theta + \rho^4 \cdot \operatorname{sen}^4\theta} = \frac{\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta} = g(\theta)$$

Il sup e l'inf di f in $\mathbb{R}^2$ sono quindi il max e il min di $g(\theta)$ al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$

$$g(\theta) = \frac{tg(\theta)}{1 + tg^4(\theta)} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$h(x) = \frac{x}{1+x^4} \qquad h'(x) = 1 + x^4 - 4x^4 = 1 - 3x^4 = 0 \iff$$
$$\iff x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$g(\theta)$ ha quindi max e min nei θ t.c.
$$tg(\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\max g(\theta) = 1/\sqrt[4]{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{4}$$
$$\min g(\theta) = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt[4]{3^3}}{4}$$

Quindi il sup $f(x,y)$ in $\mathbb{R}$ è $\frac{\sqrt[4]{3^3}}{4} = \lim_{t \to +\infty} f(\sqrt[4]{3}t, t)$
e l'inf è $-\frac{\sqrt[4]{3^3}}{4} = \lim_{t \to +\infty} f(-\sqrt[4]{3}t, t)$