

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica  
Prova in itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 30 Novembre 2015

**(Problemi da 3 punti)**

1. Consideriamo la funzione  $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y^2)$ . Calcolare  $f_{xyxx}(0, 0)$ .
2. Determinare massimo e minimo della funzione  $f(x, y) = x + 3y$  sul triangolo con vertici nei punti  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  del piano cartesiano.
3. Sia  $T$  il triangolo con vertici nei punti  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ . Calcolare

$$\int_T y^2 dx dy.$$

4. Sia  $S$  la sfera con centro in  $(0, 2, -1)$  e raggio 3. Calcolare

$$\int_S (y + z)^2 dx dy dz.$$

**(Problemi da 8 punti)**

5. Consideriamo l'insieme

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2z^2 = 5, y^2 + z^2 = 2, y \geq 0\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione  $f(x, y, z) = 2y + z^2$  al variare di  $(x, y, z)$  in  $\Gamma$ , precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare anche gli eventuali punti di minimo/massimo.

6. Per ogni  $R > 0$  poniamo  $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$  e

$$I_R = \int_{B_R} \frac{x \arctan(y^3)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy.$$

- (a) Determinare per quali valori del parametro reale  $\alpha$  l'integrale  $I_R$  è finito per ogni  $R > 0$ .
  - (b) Determinare per quali valori di  $\alpha$  si ha che  $I_R$  ha limite finito per  $R \rightarrow +\infty$ .
7. (a) Dimostrare che per ogni  $R > 0$  esiste una costante  $K$  tale che

$$\arctan(xy) - x^2 + 3y^4 \leq K(x^2 + y^2)^2$$

per ogni coppia di numeri reali  $(x, y)$  tali che  $x^2 + y^2 \geq R^2$ .

- (b) Indicata con  $K(R)$  la migliore costante per cui vale la disuguaglianza precedente, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} K(R), \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} K(R).$$

- (c) (Bonus question) Calcolare

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} R^a \cdot K(R)$$

al variare del parametro reale  $a$ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere adeguatamente giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla correttezza ed alla chiarezza delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.