BY GIMUSI 28/11/15

$\lim_{n\rightarrow infty} (n!)/e^{n^2}$, si puo' far vedere che il risultato e'0 usando semplicemente il principio di induzione?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{e^{n^2}} \to 0$$

PER CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{!}}{e^{(n+1)^2}} \cdot \frac{e^{n^2}}{\cancel{n!}} = (n+1)\frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}} = \frac{n+1}{e^{2n+1}} \to 0$$

IN ALTERNATIVA:

$$\frac{n!}{e^{n^2}} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{(n+1)!}{e^{n^2}}}_{0\le\,\cdot\,\le 1} \to 0$$

$$e^{n^2} \overset{?}{>} (n+1)! > 0 \quad\Rightarrow\quad 1 > \frac{(n+1)!}{e^{n^2}} > 0$$

$e^{n^2} > (n+1)!$ PER INDUZIONE

$$\begin{cases} n=1 \qquad e>2 \qquad \text{(PASSO BASE)} \\ e^{n^2} > (n+1)! \Rightarrow e^{(n+1)^2} > (n+2)! \qquad \text{(PASSO INDUTTIVO)} \end{cases}$$

$$e^{(n+1)^2} = e^{n^2}\cdot e^{2n+1} > (n+1)!\,e^{2n+1} \overset{e^{2n+1}>n+2}{>} (n+2)!$$

$e^{2n+1} > n+2$ PER INDUZIONE

$$\begin{cases} n=1 \qquad e^3>3 \qquad \text{(PASSO BASE)} \\ e^{2n+1} > n+2 \Rightarrow e^{2n+3} > n+3 \qquad \text{(PASSO INDUTTIVO)} \end{cases}$$

$$e^{2n+3} = e^{2n+1}\cdot e^2 > (n+2)e^2 = e^2 n + 2e^2 > n+3$$