

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 26 Gennaio 2015

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici in

$$A = (1, 2, 4), \quad B = (1, 0, 3), \quad C = (-1, 1, 1).$$

- (a) Calcolare l'area del triangolo.
- (b) Determinare se si tratta di un triangolo acutangolo, rettangolo o ottusangolo.
- (c) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice B .

2. Consideriamo, al variare del parametro reale a , il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 0 \\ 2x + ay + 8z &= 0 \\ ax + 8y + 16z &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Dimostrare che per $a = -8$ il sistema ha infinite soluzioni, e descrivere esplicitamente l'insieme di tali soluzioni.
- (b) Determinare per quali altri valori di a il sistema ha soluzione non unica, e risolvere esplicitamente il sistema per tali valori di a .

3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 . Consideriamo l'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ definita da $f(A) = 2A + 3A^t$ per ogni $A \in V$.

Dimostrare che f è diagonalizzabile e determinare una base di V rispetto alla quale f assume la forma diagonale.

4. Consideriamo in \mathbb{R}^3 il prodotto scalare rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.
- (b) Determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio W di equazione cartesiana $x + y + z = 0$.
- (c) Determinare una base di W^\perp .

(La base ortogonale e W^\perp si intendono ovviamente rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice data)

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.

Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.