ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 039

Titolo nota 20/10/2012

Le serie telescopiche e geometriche sono sostanzialmente gli unici casi in cui si riesce a scrivere una formula esplicita per S_n.

Problema: capire il comportamento di una serie (converge / diverge / indeterm.) senza avere una formula esplicita per S_n.

Oss. Per le serie convergenti, è quasi sempre impossibile trovare esplicitamente il valore a cui convergono.
Esistono metodi per trovare in modo approssimato il valore della somma (con una precisione arbitraria) PUR DI SAPER GIÀ che la serie converge.

—o—o—

Strumenti per studiare le serie

→ Teoremi algebrici
→ Condizione necessaria
→ Tabellina di serie di cui è noto il comportamento
→ Criteri di convergenza. Ci sono due casi

Serie a termini di segno costante ($a_n \geq 0$)	Serie a termini di segno variabile
→ criterio della RADICE	→ Criterio di LEIBNITZ
→ criterio del RAPPORTO	→ Criterio dell'ASSOLUTA CONVERGENZA
→ criterio del CONFRONTO	
→ criterio del CONFRONTO ASINTOTICO ↗ casi STANDARD ↘ casi LIMITE	

—o—o—

Teoremi algebrici

① Sia a_n una successione, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$ (con ovvio significato in $\overline{\mathbb{R}}$)

[Dim. $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n = \lambda (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$]

② Siano a_n e b_n due successioni. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$ (con tutte le limitazioni della somma in $\overline{\mathbb{R}}$, cioè NON VALE in caso di $+\infty - \infty$)

[Dim. Pongo $c_n = a_n + b_n$. Indichiamo

$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

$S_n^c = c_0 + c_1 + \dots + c_n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) \stackrel{\uparrow}{=} S_n^a + S_n^b$

proprietà commutativa su somme finite

Quindi $\lim_{n\to\infty} S_n^c = \lim_{n\to+\infty} S_n^a + \lim_{n\to+\infty} S_n^b$ purché valga il teo per la somma dei limiti]

Achtung! Non è vero che $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n}$ NO!!!

[$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) =$ non vengono solo termini $a_k b_k$, ma anche "termini misti"]

—o—o—

CONDIZIONE NECESSARIA Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \to 0$.

Utilizzo operativo: se a_n NON TENDE a 0 (cioè tende ad altro, compresi $\pm\infty$, oppure non ha limite), allora di sicuro la serie NON CONVERGE (dunque le restano aperte 3 possibilità: divergere a $\pm\infty$, essere indet.)

$\boxed{\text{Dim condizione necessaria}}$ Partiamo da $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, oppure in maniera equivalente $S_n = S_{n-1} + a_n$, cioè

$$a_n = \underbrace{\boxed{S_n}}_{\downarrow\, \ell} - \underbrace{\boxed{S_{n-1}}}_{\downarrow\, \ell} \to 0$$

Questo si può fare solo se $\sum a_n$ converge, cioè se $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (in questo caso anche $S_{n-1} \to \ell$, perché è sostanzialmente la stessa successione).

— o — o —

Achtung! Se $a_n \to 0$, allora posso solo dire che la serie POTREBBE convergere, ma non è obbligata a farlo.

— o — o —

$\boxed{\text{SERIE NOTE}}$ ① Serie geometriche (già viste)

② Serie ARMONICHE GENERALIZZATE (l'armonica classica è con $a=1$)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}}$$

Dim. più avanti con gli integrali

③ Parente dell'armonica generalizzata

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}}$$

Dim. con gli integrali

Oss. 1 La serie armonica generalizzata ha $a_n = \frac{1}{n^a}$. Ora $a_n \to 0$ se $a > 0$, dunque la cond. nec. è verificata $\forall a > 0$, mentre si ha convergenza solo per $a > 1$. Riassumendo

- per $a \leq 0$ la cond. nec. non è verificata e la serie DIVERGE
- per $0 < a \leq 1$ la cond. nec. è verificata, MA la serie diverge
- per $a > 1$ la cond. nec. è verificata e la serie converge

— o — o —

Serie a termini di segno costante = serie con termini $a_n \geq 0$, altrimenti "basta portare il segno − fuori dalla serie"

<u>Fatto decisivo</u> Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora S_n è debolmente crescente ($S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n$), dunque ci sono due possibilità:

- $S_n \to l \in \mathbb{R}$, cioè la serie converge
- $S_n \to +\infty$, cioè la serie diverge a $+\infty$.

$\boxed{\text{CRITERIO DELLA RADICE}}$ Sia $a_n \geq 0$ (definitivamente). Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora

- se $l > 1$, la serie diverge (e non verifica nemmeno la cond. nec.)
- se $l < 1$, la serie converge
- se $l = 1$, allora BOH.

$\boxed{\text{CRITERIO DEL RAPPORTO}}$ Stessa cosa con $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\boxed{\text{CRITERIO DEL CONFRONTO}}$ Supponiamo che $a_n \geq b_n \geq 0$ definitiv.

Allora valgono queste due implicazioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

<u>Achtung!</u> Ogni altra implicazione è ABUSIVA.

<u>Oss. 2</u> Se ad una serie si cambiano un numero finito di termini, non cambia il tipo di comportamento (al più cambia il valore della somma nel caso di serie convergenti). Quindi a_n conta per quello che è definitivamente.