1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (0, 1, 0), \qquad B = (2, 3, 1), \qquad C = (-1, 1, 0), \qquad D = (0, 2, 1).$$

(a) Determinare la distanza di B dal piano ACD.
(b) Determinare il punto della retta AC più vicino a B.
(c) Determinare la mutua posizione delle rette AB e CD.

03/01/2015

(a) Piano ACD : $A + t(C-A) + s(D-A) = (0,1,0) + t(-1,0,0) + s(0,1,1)$

Cerco la cartesiana $\begin{pmatrix} * & * & * \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,1,-1) \rightsquigarrow \boxed{y - z = 1}$

$$\text{Dist} = \frac{|3-1-1|}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(b) Retta AC : $A + t(C-A) = (0,1,0) + t(-1,0,0) = (-t, 1, 0)$

Piano per B $\perp$ retta AC : $x = 2$

Intersezione retta - piano : $-t = 2 \rightsquigarrow t = -2 \rightsquigarrow \boxed{(2,1,0)}$

(c) Retta AB : $A + t(B-A) = (0,1,0) + t(2,2,1)$

Retta CD : $C + t(D-C) = (-1,1,0) + t(1,1,1)$

Velocità lin. indip. $\Rightarrow$ incidenti o sghembe. Vedo se si intersecano

$$(0,1,0) + t(2,2,1) = (-1,1,0) + s(1,1,1)$$
$$t(2,2,1) - s(1,1,1) = (-1,0,0)$$

Vedo se il 3° vettore è comb. lin. dei primi due

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Det $\neq 0$ $\Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni

$\Rightarrow$ le rette non si intersecano

$\Rightarrow$ sono $\boxed{\text{sghembe}}$

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2z &= 7 \\ y + 2w &= b \\ x + y + z + aw &= 5 \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema non ha soluzioni.

(b) Determinare per quali valori dei parametri l'insieme delle soluzioni ha dimensione massima, ed in tal caso determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

(a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 2 & a & 5 \end{array}\right)$

A = matrice coeff. A' = matrice completa

Rango $A \geq 2$.

L'unica possibilità per avere nessuna soluzione è che Rango $A = 2$, Rango $A' = 3$

Rango $A = 2 \iff 4^a$ colonna dipende dalle prime 2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ Det $= 0 \iff a - 2 = 0 \iff a = 2$

A quel p.to Rango $A' = 3 \iff 5^a$ colonna non dipende dalle prime 2:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ Det $= 0 \iff 5 - 7 - b = 0 \iff b = -2$

Quindi nessuna soluzione $\iff \boxed{a = 2 \text{ e } b \neq -2}$

(b) Per avere infinite soluzioni deve essere Rango A = Rango $A' = 2$.

Per i conti precedenti questo accade se e solo se $\boxed{a = 2 \text{ e } b = -2}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$ Faccio Gauss $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$

Tornando in forma di sistema

$x + 2z = 7$ $\quad z = t,\ w = s,\ y = -2 - 2w = -2 - 2s,$

$y + 2w = -2$ $\quad x = 7 - 2z = 7 - 2t$

$$(x, y, z, w) = (7 - 2t, -2 - 2s, t, s)$$
$$= \boxed{(7, -2, 0, 0) + t(-2, 0, 1, 0) + s(0, -2, 0, 1)}$$

Una verifica qui non guasterebbe

3. Consideriamo le quattro matrici

$A \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $C \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $D \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Tre delle quattro matrici sono simili tra loro. Determinare l'intrusa.

(b) Determinare la forma canonica di Jordan della prima matrice (quella a sinistra) ed una matrice di cambio di base che la porta in tale forma.

(a) È evidente che B, C, D hanno autovalori 3, 3, 2 (sono triangolari)

Calcolo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 7 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 7 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \rightsquigarrow$$ anche A ha autovalori 3, 3, 2.

Quindi la cosa da guardare è la $m_g(3)$ nei quattro casi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$m_g = 1$ $\quad$ $m_g = 2$ $\quad$ $m_g = 1$ $\quad$ $m_g = 1$

INTRUSA

(b) La forma di Jordan di A è $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J}$

Detta $\{v_1, v_2, v_3\}$ una corrispondente base deve accadere che

$Av_1 = 3v_1 \qquad Av_2 = 3v_2 + v_1 \qquad Av_3 = 2v_3$

$v_1 = (1, 0, 0)$ (banale verifica)

$v_3 = (0, 0, 1)$ (banale verifica)

$v_2 = (x, y, z) \qquad (A - 3\,Id)\, v_2 = v_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7y \\ 0 \\ 7y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_2 = \left(0, \tfrac{1}{7}, 1\right)$$

posso fissarlo a piacere

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ora bisognerebbe verificare che $M^{-1}AM = J$.

(cosa che in effetti accade)

4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di 60° in senso orario intorno al punto (2, 1).

(b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta di equazione $x + 2y = 1$.

(a) Rotazione di 60° oraria intorno all'origine:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rotazione intorno al p.to P

$$x \rightsquigarrow (x-P) \rightsquigarrow R(x-P) \rightsquigarrow R(x-P)+P$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{3} - \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(Veloce verifica che (2,1) resti fisso)

(b) $x+2y=1 \rightsquigarrow$ in parametrica $(1,0)+t(2,-1) = (1+2t, -t)$

$\rightsquigarrow$ sostituendo nell'espressione

$$\left(\frac{1+2t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+2t) - \frac{1}{2}t + \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + t\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + t\left(-\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + t\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$\rightsquigarrow$ ritorno in cartesiana

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)x = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)x = -1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}$$