1 Secondo appello, 27/01/2014

1.1 Esercizio 3

(i) $f((0,1,1)) = (1,2,3)$
(ii) $f((2,-1,0)) = (0,1,0)$
(iii) $f((0,0,1)) = (-1,3,-3)$

a) $\exists! f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che (i),(ii),(iii)?

Basta mostrare che (0,1,1),(2,-1,0),(0,0,1) sono lin. indip. e quindi base di $\mathbb{R}^3$(Fissando le immagini per la base determino il "comportamento" di f rispetto a tutto lo spazio). Sono effettivamente una base?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI (3 PIVOT)}$$

b) Dimensioni e basi di Ker$f$ e Imf

3=Dim$\mathbb{R}^3$=Dim(Ker$f$)+Dim(Imf) Imf=Span$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (2 PIVOT)} \Rightarrow \text{Dim(Im}f\text{)=2} \Rightarrow \text{Dim(Ker}f\text{)=1}$$

Ad es. una base di Imf è β=$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$. Per Ker$f$ notiamo che:

(1,2,3)-5(0,1,0)+(-1,3,-3)=0 e da (i),(ii),(iii) posso scrivere
f((0,1,1))-5f((2,-1,0))+f((0,0,1))=0 e per linearità $f((-10,6,2)) = 0$

Allora Ker$f$=Span$\{ \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \}$ e γ=$\{ \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \}$ è una base di Ker$f$

c) Matrice associata ad f (base canonica in partenza e arrivo)

f((1,0,0))=$f((2,-1,0)*1/2 + (0,1,1)*1/2 - (0,0,1)*1/2) = (1,0,3)$
f((0,1,0))=$f((0,1,1) - (0,0,1)) = (2,-1,-6)$
f((0,0,1))=(-1,3,-3) (da (iii)) $\Rightarrow m_{\zeta,\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$