BY GIMUSI 05/10/2015

Logica elementare 1

Argomenti: logica elementare **Difficoltà:** ⋆

Prerequisiti: buon senso, concetto di "necessario" e "sufficiente"

Nei punti successivi viene presentata un'affermazione, che si assume vera (un assioma). Stabilire, sulla base di questa affermazione, se le deduzioni successive sono corrette oppure no.

1. Assioma: "tutti gli studenti di matematica sono strani".

Alberto studia matematica, quindi è strano	V
Barbara studia fisica, quindi non è strana	F
Clara non è strana, quindi non studia matematica	V
Dario è strano, quindi studia matematica	F
Elena è strana, quindi non studia fisica	F
Esiste almeno uno studente di informatica che non è strano	F

2. Assioma: "per superare Analisi 1 è necessario studiare tutti i giorni".

Alberto studia tutti i giorni, quindi supererà Analisi 1	F
Barbara ha superato Analisi 1, quindi ha studiato tutti i giorni	V
Clara non studia tutti i giorni, quindi non supererà Analisi 1	V
Dario non ha superato Analisi 1, quindi non ha studiato tutti i giorni	F

3. Assioma: "per superare il test, è sufficiente copiare dal vicino".

Alberto ha superato il test, quindi ha copiato dal vicino	F
Barbara non ha superato il test, quindi non ha copiato dal vicino	F
Clara ha copiato dal vicino, quindi ha superato il test	V
Dario non ha copiato dal vicino, quindi non ha superato il test	F
Qualcuno ha superato il test senza copiare dal vicino	V
Nessuno ha copiato dal vicino senza superare il test	V

?

4. Assioma: "per laurearsi è necessario e sufficiente pagare una tangente".

Alberto ha pagato la tangente, quindi si laureerà	V
Barbara non è disposta a pagare la tangente, quindi non si laureerà	V
Clara si è laurata, quindi ha pagato la tangente	V
Dario non si è laurato, quindi non ha pagato la tangente	V

1/7

Logica elementare 2

Argomenti: logica elementare **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: buon senso, concetto di "and" e "vel"

Nei punti successivi viene presentata un'affermazione, che si assume vera (un assioma). Stabilire, sulla base di questa affermazione, se le deduzioni successive sono corrette oppure no.

1. Assioma: "tutti i docenti di matematica sono antipatici e incapaci".

Alberto insegna matematica, quindi è incapace	V
Barbara è simpatica, quindi non insegna matematica	V
Clara è antipatica e incapace, quindi insegna matematica	F
Dario non insegna matematica, quindi è simpatico	F
Elena non insegna matematica, quindi è simpatica o capace	F
Fabio è simpatico e incapace, quindi non insegna matematica	V
Esistono persone antipatiche che non insegnano matematica	V
L'antipatia è condizione necessaria per insegnare matematica	V

2. Assioma: "tutti gli studenti di matematica amano la musica o lo sport".

Alberto studia matematica, quindi ama lo sport	F
Barbara non studia matematica, quindi non ama né la musica, né lo sport	F
Clara non ama lo sport, quindi non studia matematica	F
Dario ama lo sport, ma non la musica, quindi non studia matematica	F
Elena ama lo sport e la musica, quindi non studia matematica	F
Fabio non ama né la musica, né lo sport, quindi non studia matematica	V
Giovanni studia matematica e ama lo sport, quindi non ama la musica	F
Ilaria studia matematica e non ama lo sport, quindi ama la musica	V

3. Tutti gli studenti di matematica che amano la Geometria odiano l'Analisi.

Alberto studia matematica e odia l'Analisi, quindi ama la Geometria	V
Barbara ama l'Analisi e la Geometria, quindi non studia matematica	V
Clara odia l'Analisi e la Geometria, quindi non studia matematica	F
Dario ama l'Analisi, quindi odia la Geometria o non studia matematica	F
Elisabetta studia matematica e odia la Geometria, quindi ama l'Analisi	F
Fabio ama la Geometria e odia l'Analisi, quindi studia matematica	F
Giovanni odia l'Analisi e la Geometria, quindi studia matematica	F
Ilaria studia matematica e ama l'Analisi, quindi non ama la Geometria	F

2/7

Logica elementare 3

Argomenti: logica elementare **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: buon senso, concetto di "and" e "vel"

Nei punti successivi viene presentata un'affermazione, che si assume vera (un assioma). Stabilire se le affermazioni successive sono *compatibili* oppure no con quella iniziale.

1. Assioma: "i giovani sono tutti bamboccioni".

Alberto è giovane e bamboccione	SI
Barbara è vecchia e bamboccciona	SI
Clara è giovane ma non bamboccciona	NO
Dario è vecchio ma non bamboccione	SI
Esistono dei bamboccioni che sono giovani	SI
Esistono dei bamboccioni che non sono giovani	SI

2. Assioma: "tutti gli studenti di matematica amano la musica o lo sport".

Alberto studia matematica, ama lo sport, non ama la musica	SI
Barbara studia matematica e non ama lo sport	SI
Clara studia matematica, ama lo sport e ama la musica	SI
Dario studia fisica e non ama la musica	SI
Elena studia fisica e ama sia lo sport sia la musica	SI
Fabio studia matematica, non ama lo sport e non ama la musica	NO
Tutti gli studenti di matematica odiano lo sport	SI
Tutti gli studenti che odiano la musica studiano matematica	SI

?

3. Assioma: "Alberto studia matematica, è simpatico, odia l'Analisi ma ama l'Aritmetica".

Tutti gli studenti di matematica che sono simpatici odiano l'Analisi	SI
Tutti gli studenti di matematica che sono antipatici odiano l'Analisi	SI
Tutti gli studenti di matematica che odiano l'Analisi sono simpatici	SI
Tutti gli studenti di matematica che odiano l'Analisi sono antipatici	NO
Tutti gli studenti simpatici amano l'Analisi	NO
Tutti gli studenti di matematica che odiano l'Aritmetica sono simpatici	SI
Tutti gli studenti di matematica che odiano l'Aritmetica sono antipatici	SI
Esistono studenti simpatici che odiano l'Aritmetica	SI
Esistono studenti simpatici che amano l'Aritmetica	SI

3/7

Logica elementare 4

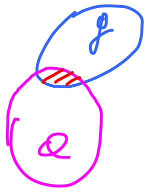
Argomenti: logica elementare **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: buon senso, concetto di "and" e "vel", implicazioni

---

Consideriamo le seguenti quattro affermazioni (assiomi):

A_1	"chi ama l'Analisi o la Geometria è grasso o antipatico"
A_2	"chi ama l'Analisi o la Geometria è grasso e antipatico"
A_3	"chi ama l'Analisi e la Geometria è grasso o antipatico"
A_4	"chi ama l'Analisi e la Geometria è grasso e antipatico"



Nella seguente tabella vengono presentate varie affermazioni. Per ciascuna di esse si chiede di stabilire se, rispetto a ciascuno dei quattro assiomi, sono *deducibili* (cioè seguono necessariamente), oppure sono *indipendenti* (cioè possono essere vere o false senza contraddire l'assioma), oppure sono in *contraddizione* (cioè sono necessariamente false se l'assioma è supposto vero).

	A_1	A_2	A_3	A_4
Tutti quelli che amano l'Analisi sono grassi	I	I	I	D
Nessun grasso ama la Geometria	I	I	I	C
Tutti i magri odiano l'Analisi	I	I	I	I
Tutti i simpatici odiano l'Analisi o la Geometria	I	I	I	I
Tutti i magri odiano l'Analisi e la Geometria	I	I	I	I
Esiste un simpatico che ama la Geometria	I	I	I	C
Tutti i magri simpatici amano l'Analisi	I	I	I	I
Chi odia l'Analisi è antipatico	I	I	I	I
Marco ama l'Analisi e la Geometria ed è simpatico	I	I	I	C
Marina è magra, ama l'Analisi e odia la Geometria	I	C	I	I
I magri che amano la Geometria odiano tutti l'Analisi	I	I	I	I
Almeno un simpatico odia Analisi e Geometria	I	I	I	I

Stabilire quali implicazioni sussistono certamente tra i quattro assiomi (nella tabella le implicazioni sono pensate $P \Rightarrow Q$ con le P rappresentate dalle intestazioni delle righe e le Q dalle intestazioni delle colonne).

Q

P

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	V	F	V	F
A_2	V	V	V	V
A_3	F	F	V	F
A_4	F	F	V	V

5/7

Quantificatori 1

Argomenti: uso dei quantificatori **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: proposizioni, predicati, "per ogni", "esiste almeno un"

Nella seguente tabella vengono presentati dei predicati e due modi di quantificare il parametro x in essi presente. Stabilire se le proposizioni risultanti sono vere o false.

Predicato	$\exists x \in \mathbb{N}$	$\forall x \in \mathbb{N}$	Predicato	$\exists x \in \mathbb{N}$	$\forall x \in \mathbb{N}$
$x^2 \geq 100$	V	F	$x^2 \leq 100$	V	F
$x^2 \geq -100$	V	V	$x^2 \leq -100$	F	F
$(n+1)^2 = n^2 + 1$	V	F	$2^n \geq n^2 + 100$	V	F
$2^n + 3^n = 5^n$	V	F	$n^5 \geq n$	V	V

Nella seguente tabella vengono presentati dei predicati che dipendono da due parametri a e b, un insieme numerico dove si intende che questi parametri variano, e sei possibili modi di quantificare i due parametri (supposti appartenenti all'insieme precedente). Stabilire se le proposizioni risultanti sono vere o false.

Predicato	Ambiente	$\exists a\ \exists b$	$\forall a\ \forall b$	$\forall a\ \exists b$	$\forall b\ \exists a$	$\exists a\ \forall b$	$\exists b\ \forall a$
$a \geq b$	$\mathbb{N}$	V	F	V	V	V	V
$a \geq b$	$\mathbb{Z}$	V	F	V	V	V	V
$a^2 \geq b$	$\mathbb{N}$	V	F	V	V	V	V
$a + b \geq 0$	$\mathbb{N}$	V	V	V	V	V	V
$a + b \geq 2014$	$\mathbb{Z}$	V	F	V	V	V	V
$a + b \geq 2014$	$\mathbb{N}$	V	F	F	F	F	F

Nella seguente tabella vengono presentati dei predicati che dipendono da tre parametri a, b e c, che si pensano appartenenti a $\mathbb{Z}$, ed alcuni possibili modi di quantificare i parametri. Determinare se le proposizioni ottenute con tali quantificazioni sono vere o false.

Predicato	Quantif.	V/F	Quantif.	V/F	Quantif.	V/F	Quantif.	V/F
$a \geq b + c$	$\forall b\ \forall c\ \exists a$	V	$\exists b\ \forall c\ \forall a$	V	$\exists b\ \exists c\ \exists a$	V	$\forall b\ \exists c\ \forall a$	V
$(a+b)^2 \geq c$	$\exists c\ \forall a\ \forall b$	V	$\forall a\ \exists b\ \forall c$	F	$\forall a\ \forall b\ \exists c$	V	$\forall a\ \exists c\ \forall b$	V
$2^a + 2^b = 2^c$	$\forall a\ \forall b\ \exists c$	F	$\exists a\ \exists b\ \exists c$	V	$\forall a\ \exists b\ \exists c$	F	$\forall c\ \exists a\ \exists b$	F
$a^2 \geq b - c$	$\forall b\ \exists c\ \forall a$	V	$\forall a\ \forall b\ \exists c$	V	$\exists a\ \forall b\ \exists c$	V	$\forall b\ \forall c\ \exists a$	V

3/7

Quantificatori 2

Argomenti: linguaggio naturale vs linguaggio matematico **Difficoltà:** ⋆⋆⋆

Prerequisiti: proposizioni, predicati, quantificatori

Un corso è frequentato da un gruppo B di ragazzi ed un gruppo G di ragazze. Sia $P(b, g)$ il predicato "al ragazzo b piace la ragazza g". Nelle seguenti due tabelle sono riportate sei affermazioni in linguaggio comune e sei proposizioni formali. Stabilire l'esatta corrispondenza tra le une e le altre.

1	Ad ogni ragazzo piace almeno una ragazza
2	C'è una ragazza che piace a tutti i ragazzi
3	C'è un ragazzo a cui piacciono tutte le ragazze
4	A tutti i ragazzi piacciono tutte le ragazze
5	C'è un ragazzo a cui piace almeno una ragazza
6	Ogni ragazza piace ad almeno un ragazzo

4	$\forall b \in B \; \forall g \in G \quad P(b, g)$
5	$\exists b \in B \; \exists g \in G \quad P(b, g)$
1	$\forall b \in B \; \exists g \in G \quad P(b, g)$
6	$\forall g \in G \; \exists b \in B \quad P(b, g)$
3	$\exists b \in B \; \forall g \in G \quad P(b, g)$
2	$\exists g \in G \; \forall b \in B \quad P(b, g)$

Nelle tabelle seguenti sono descritti quattro insiemi, sia in linguaggio comune sia in termini matematici (facendo riferimento al predicato precedente). Stabilire l'esatta corrispondenza tra le definizioni.

1	I ragazzi a cui piacciono tutte le ragazze
2	I ragazzi a cui piace almeno una ragazza
3	Le ragazze che piacciono a tutti i ragazzi
4	Le ragazze che piaccio ad almeno un ragazzo

2	$\{b \in B : \exists g \in G \quad P(b, g)\}$
4	$\{g \in G : \exists b \in B \quad P(b, g)\}$
3	$\{g \in G : \forall b \in B \quad P(b, g)\}$
1	$\{b \in B : \forall g \in G \quad P(b, g)\}$

Una gruppo S di studenti sta preparando un insieme M di materie in un insieme G di giorni. Sia $P(s, e, g)$ il predicato "lo studente s sta preparando la materia m nel giorno g". Tradurre in linguaggio matematico le seguenti affermazioni.

Linguaggio naturale	Matematichese
Ogni giorno almeno uno studente prepara tutte le materie	$\forall g \; \exists s \; \forall e \; P$
Ogni studente prepara almeno una materia al giorno	$\forall s \; \forall g \; \exists e \; P$
C'è un giorno in cui la stessa materia è preparata da tutti gli studenti	$\exists g \; \exists e \; \forall s \; P$
Tutti gli studenti preparano almeno una materia tutti i giorni	$\forall g \; \forall s \; \exists e \; P$
C'è una materia che ogni studente prepara tutti i giorni	$\forall g \; \exists e \; \forall s \; P$
Ogni studente ha una materia che prepara tutti i giorni	$\forall s \; \exists e \; \forall g \; P$
Ogni materia viene preparata almeno un giorno da ogni studente	$\forall e \; \forall s \; \exists g \; P$
Ogni studente dedica almeno un giorno ad ogni materia	$\forall s \; \forall e \; \exists g \; P$

6/7

Logica elementare 5

Argomenti: negazione di proposizioni **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: proposizioni, predicati, quantificatori, implicazione, negazione

---

Nella tabella seguente sono riportate sei affermazioni in linguaggio naturale, relative ad un concorso cinematografico. Determinare la negazione delle affermazioni, scrivendo la risposta in linguaggio naturale. Prestare la massima attenzione ad evitare ogni possibile ambiguità (il che equivale sostanzialmente ad esprimersi in linguaggio matematico!).

	Affermazione	Negazione
$\exists G\ \exists f\ P$	Almeno un giudice ha visto almeno un film	NESSUN G HA VISTO UN F
$\forall G\ \forall f\ P$	Tutti i giudici hanno visto tutti i film	ESISTE G CHE NON HA VISTO TUTTI I F
$\forall G\ \exists f\ P$	Ogni giudice ha visto almeno un film	ESISTE G CHE NON HA VISTO ALCUN F
$\forall f\ \exists G\ P$	Tutti i film sono stati visti da almeno un giudice	C'È UN F NON VISTO DA TUTTI I G
$\exists G\ \forall f\ P$	Almeno un giudice ha visto tutti i film	OGNI G NON HA VISTO ALMENO UN F
$\exists f\ \forall G\ P$	Un film è stato visto da tutti i giudici	OGNI F NON È STATO VISTO DA ALMENO UN G

Nella seguente tabella compaiono 5 + 3 affermazioni e le loro negazioni. Stabilire l'esatta corrispondenza tra ogni affermazione e la sua negazione.

$\exists M: m \wedge \bar{s}$	P_1	Almeno un matematico ama la musica, ma non lo sport	$\equiv NOT(P_4)$
$\forall M: \bar{m} \wedge \bar{s}$	P_2	Tutti i matematici non amano né la musica, né lo sport	$\equiv NOT(P_5)$
$\forall M: s \Rightarrow \bar{m}$	P_3	Tutti i matematici che amano lo sport non amano la musica	$\equiv NOT(P_{10})$
$\forall M: \bar{m} \Rightarrow \bar{s}$	P_4	Tutti i matematici che non amano lo sport non amano nemmeno la musica	$\equiv NOT(P_1)$
$\exists M: m \vee s$	P_5	Almeno un matematico ama la musica oppure lo sport	$\equiv NOT(P_2)$
$\exists M: m \vee \bar{s}$	P_6	Almeno un matematico ama la musica o non ama lo sport	$\equiv NOT(P_8)$
$\forall M: m \vee s$	P_7	Ogni matematico ama la musica o lo sport	$\equiv NOT(P_9)$
$\forall M: \bar{m} \wedge s$	P_8	Tutti i matematici amano lo sport, ma non la musica	$\equiv NOT(P_6)$
$\exists M: \bar{m} \wedge \bar{s}$	P_9	Almeno un matematico non ama né la musica, né lo sport	$\equiv NOT(P_7)$
$\exists M: s \wedge m$	P_{10}	Almeno un matematico ama la musica e lo sport	$\equiv NOT(P_3)$
$\exists s\ \forall e\ \exists a\ \bar{P}$	P_{11}	Almeno uno studente non ha superato alcun esame in almeno un anno	$\equiv NOT(P_{14})$
$\exists a\ \exists e\ \forall s\ \bar{P}$	P_{12}	Esiste un anno in cui tutti gli studenti non hanno superato lo stesso esame	$\equiv NOT(P_{15})$
$\forall a\ \exists s\ \forall e\ P$	P_{13}	Ogni anno almeno uno studente ha superato tutti gli esami	$\equiv NOT(P_{16})$
$\forall s\ \exists e\ \forall a\ P$	P_{14}	Ogni studente ha superato almeno un esame all'anno	$\equiv NOT(P_{11})$
$\forall a\ \forall e\ \exists s\ P$	P_{15}	Ogni esame è stato superato ogni anno da almeno uno studente	$\equiv NOT(P_{12})$
$\exists a\ \forall s\ \exists e\ \bar{P}$	P_{16}	Esiste un anno in cui nessuno studente ha superato tutti gli esami	$\equiv NOT(P_{13})$

7/7