BY GIMUSI 10/07/15

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4 - x^2y^2$.
   (a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f e classificarli.
   (b) Determinare estremo superiore e inferiore di f su $\mathbb{R}^2$ precisando se si tratta di massimo e/o minimo.

2. Siano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 1, x \geq 1\}, \qquad f(x, y) = \frac{y}{1 + x + y}.$$

   Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo e calcolando anche gli eventuali punti di massimo/minimo.

3. (a) Sia V_1 il solido definito da

$$V_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq z,\ z \geq 0\}.$$

   Determinare il volume di V_1 e le coordinate del suo baricentro.

   (b) Sia V_2 il solido definito da

$$V_2 := \{(x, y, z) \in V_1 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

   Determinare il volume di V_2 e le coordinate del suo baricentro.

4. Sia D il dominio di $\mathbb{R}^2$ racchiuso dalla curva $\gamma(t) = (t^2, t(\pi - t))$ con $0 \leq t \leq \pi$ e dall'asse delle x. Calcolare

$$\int_D x\, dx\, dy.$$

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + y^4 - x^2y^2$.

   (a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f e classificarli.

   (b) Determinare estremo superiore e inferiore di f su $\mathbb{R}^2$ precisando se si tratta di massimo e/o minimo.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^4 - x^2y^2$

RICERCA DEI PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f_y = 4y^3 - 2x^2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1-y^2) = 0 \\ y(2y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightsquigarrow y(2y^2) = 0 \quad y = 0 \rightsquigarrow P_0 = (0,0) \\ 1 - y^2 = 0 \quad y = \pm 1 \rightsquigarrow \pm(2 - x^2) = 0 \quad x = \pm\sqrt{2} \begin{cases} P_{1,2} = (\pm\sqrt{2}, 1) \\ P_{3,4} = (\pm\sqrt{2}, -1) \end{cases} \end{cases}$$

MATRICE HESSIANA

$$f_{xx} = 2 - 2y^2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = -4xy \qquad f_{yy} = 12y^2 - 2x^2$$

$$\begin{cases} Hf(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{SEMIDEF. POSITIVA} \\ Hf(P_1) = Hf(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{cases} \text{DET} = 0 - 32 = -32 \\ \rightsquigarrow \text{INDEFINITA x SYLV.} \end{cases} \\ Hf(P_2) = Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{cases} \text{DET} = 0 - 32 = -32 \\ \rightsquigarrow \text{INDEFINITA x SYLV.} \end{cases} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ P_1, P_2, P_3, P_4 SONO PUNTI DI SELLA

STUDIO NELL'INTORNO DI $P_0=(0,0)$

$$f(x,y)=x^2+y^4-x^2y^2=x^2\underbrace{(1-y^2)}_{\geq 0\ |y|\leq 1}+y^4\geq f(P_0)=0$$

$\rightsquigarrow$ $P_0=(0,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE

(b) $f(x,y)=x^2+y^4-x^2y^2$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y=0}} x^2=+\infty \rightsquigarrow \text{SUP} f=+\infty$$

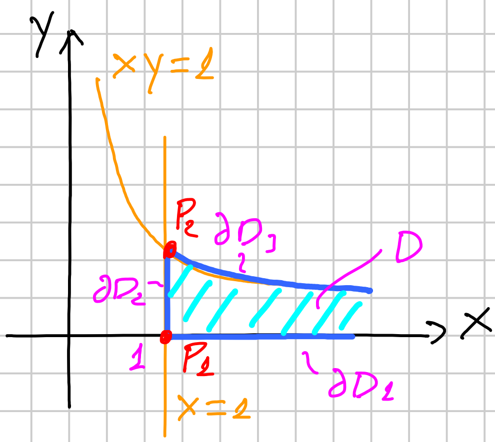
$$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ x=2y}} f(x,y)=\lim_{\substack{y\to+\infty\\ x=2y}} 4y^2+y^4-4y^4=-\infty \rightsquigarrow \text{INF} f=-\infty$$

2. Siano

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq xy\leq 1,\ x\geq 1\},\qquad f(x,y)=\frac{y}{1+x+y}.$$

Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo e calcolando anche gli eventuali punti di massimo/minimo.

STUDIO AL BORDO $\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2\cup\partial D_3$



∂D_1: $y=0 \rightsquigarrow f(x,0)=0$

∂D_2: $x=1,\ 0\leq y\leq 1$

$$f(x,y)=g(y)=\frac{y}{2+y}$$

$$g'(y)=\frac{2+y-y}{(2+y)^2}=\frac{2}{(2+y)^2}>0 \rightsquigarrow \begin{cases}\text{MIN}: f(P_1)=0\\ \text{MAX}: f(P_2)=1/3\end{cases}$$

∂D_3: $xy=1\quad y=1/x\quad x\geq 1$

$$f(x,y)=h(x)=\frac{1/x}{1+x+1/x}=\frac{1}{1+x+x^2}\rightsquigarrow\begin{cases}\text{MAX}: f(P_2)=1/3\\ \text{INF}=0,\ x\to+\infty\end{cases}$$

PUNTI STAZIONARI INTERNI

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{-y}{(1+x+y)^2} = 0 \\[2ex] f_y = \dfrac{1+x+y-y}{(1+x+y)^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\[2ex] 1+x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \text{SUP} f = \text{MAX} f = 1/3 & \text{IN } P_2(1,1) \\ \text{INF} f = \text{MIN} f = 0 & \text{IN } P \in \partial D_1 \end{cases}$$

3. (a) Sia V_1 il solido definito da

$$V_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq z,\ z \geq 0\}.$$

Determinare il volume di V_1 e le coordinate del suo baricentro.

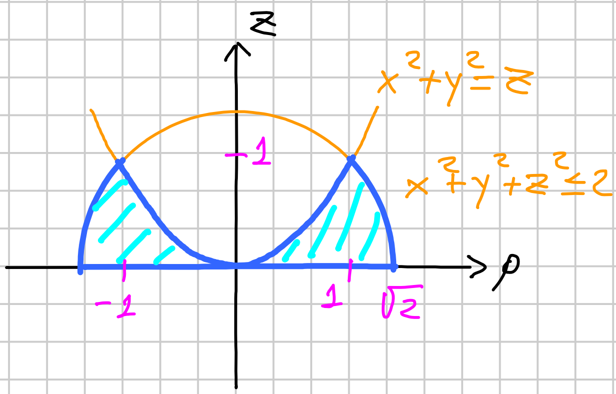
(b) Sia V_2 il solido definito da

$$V_2 := \{(x,y,z) \in V_1 : x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Determinare il volume di V_2 e le coordinate del suo baricentro.

(a) $$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x^2+y^2 = z \end{cases} \rightsquigarrow z^2+z-2=0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-2} \end{cases}$$



CALCOLO DEL VOLUME "V_1"

$$V_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \left[\rho^2/2\right]_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2-z^2}} dz =$$

$$= \pi \int_0^1 (2-z^2-z)\, dz = \pi \left[2z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \pi \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \pi \, \frac{12-2-3}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

COORDINATE BARICENTRO: $x_G = y_G = 0$ × SIMMETRIA

$$z_G \cdot V_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt z}^{\sqrt{2-z^2}} z\rho\, d\rho\, dz\, d\theta = 2\pi\int_0^1 z\left[\rho^2/2\right]_{\sqrt z}^{\sqrt{2-z^2}} dz =$$

$$= \pi\int_0^1 (2z - z^3 - z^2)\,dz = \pi\left[z^2 - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 =$$

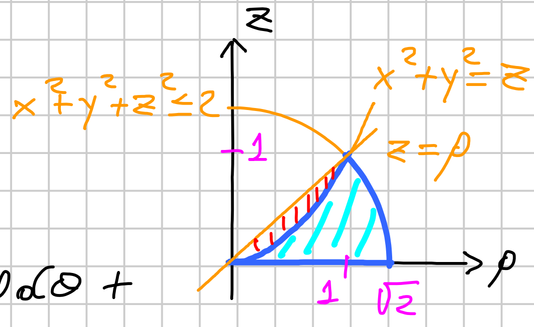
$$= \pi\left(1 - \frac14 - \frac13\right) = \pi\,\frac{12-3-4}{12} = \frac{5}{12}\pi$$

$$\rightsquigarrow z_G = \frac{5\,\cancel{\pi}}{\cancel{12}\,2}\cdot\frac{\cancel{6}}{7\cancel{\pi}} = \frac{5}{14}$$

(b) VOLUME DI $V_2 = \frac14 V_1 = \frac14\,\frac76\pi = \frac{7}{24}\pi$

$$x_G \cdot V_2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{\sqrt z}^{\sqrt{2-z^2}} \rho\cos\theta\cdot\rho\, d\rho\, dz\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\int_0^1\int_{\sqrt z}^{\sqrt{2-z^2}} \rho^2\, d\rho\, dz =$$

$$= \frac13\int_0^1\left(\sqrt{(2-z^2)^3} - \sqrt{z^3}\right) dz$$



IN ALTERNATIVA:

$$x_G \cdot V_2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt2} \rho\cos\theta\cos\varphi\cdot\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta +$$

$$- \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_z^{\sqrt z} \rho\cos\theta\cdot\rho\, d\rho\, dz\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\, d\varphi\int_0^{\sqrt2}\rho^3\, d\rho - \int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\int_0^1\left[\rho^3/3\right]_z^{\sqrt z} dz =$$

$$= [\sin\theta]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/4} \cdot \left[\rho^4/4\right]_0^{\sqrt{2}} - [\sin\theta]_0^{\pi/2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{3}\left(\sqrt{z^3} - z^3\right) dz =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} z^{5/2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\,\frac{8-5}{20} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{5}$$

$$\leadsto x_G = \frac{24}{7\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{7} + \frac{24}{35\pi} = y_G \quad (x \text{ SIMMETRIA})$$

$$z_G \cdot V_2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2-z^2}} z\rho \, d\rho \, dz \, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 z\left[\rho^2/2\right]_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2-z^2}} dz =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(2z - z^3 - z^2\right) dz = \frac{\pi}{4}\left[z^2 - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 =$$

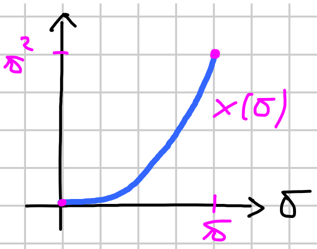
$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}\,\frac{12-3-4}{12} = \frac{5}{48}\pi$$

$$\leadsto z_G = \frac{\cancel{24}}{7\cancel{\pi}} \cdot \frac{5\cancel{\pi}}{\cancel{48}_{2}} = \frac{5}{14}$$

4. Sia D il dominio di $\mathbb{R}^2$ racchiuso dalla curva $\gamma(t) = (t^2, t(\pi - t))$ con $0 \le t \le \pi$ e dall'asse delle x. Calcolare

$$\int_D x \, dx \, dy.$$

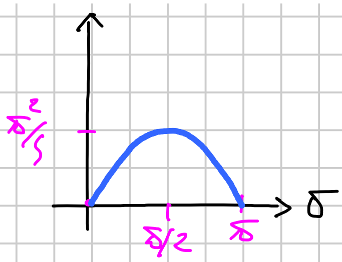
$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t(\pi - t) \end{cases}$$

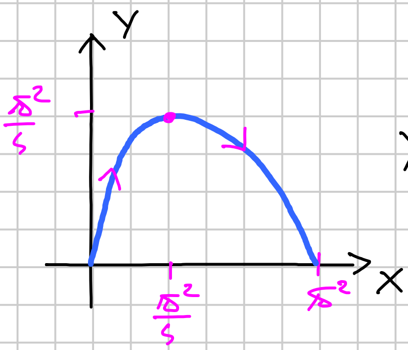


$y' = \pi - 2t = 0$

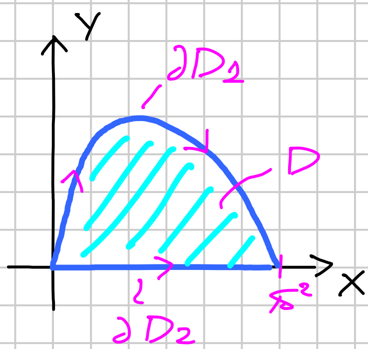
$t = \pi/2$

$y_{max} = \pi^2/4$





$y = \pi\sqrt{x} - x$



TEOREMA DI GAUSS-GREEN $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\vec E\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec E\cdot\vec n\,ds$

SIA: $\vec E = (\overset{A}{0}, \overset{B}{yx}) \rightsquigarrow \operatorname{div}\vec E = x$

∂D_1 SENSO ORARIO

$$\int_D x\,dx\,dy = \int_{\partial D}\vec E\cdot\vec n\,ds = -\int_{\partial D_1}\vec E\cdot\vec n\,ds + \cancel{\int_{\partial D_2}\vec E\cdot\vec n\,ds}$$

$$\begin{cases} \partial D_1 = \{(x,y) : x = t^2,\ y = t(\pi - t)\quad t = (0,\pi)\} \\ \partial D_2 = \{(x,y) : x = t,\ y = 0\quad t = (0,\pi)\} \rightsquigarrow \vec E = 0 \end{cases}$$

$$-\int_{\partial D_1}\vec E\cdot\vec n\,ds = -\int_{\partial D_1}\cancel{A\,dy} - B\,dx = \int_{\partial D_1} xy\,dx = \int_0^\pi t^3(\pi - t)\cdot 2t\,dt =$$

$$= \int_0^\pi 2\pi t^4 - 2t^5\,dt = \left[2\pi\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{3}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{5}\pi^6 - \frac{1}{3}\pi^6 = \frac{6-5}{15}\pi^6 = \frac{\pi^6}{15}$$