

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4 - \alpha xy^2$.
 - (a) Provare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$.
 - (b) Provare che per $\alpha = 10$ si ha $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.
 - (c) Stabilire per quali α la funzione f ammette minimo su \mathbb{R}^2 ed in tal caso calcolarlo, determinando anche i punti di minimo.
2. Sia V il solido di \mathbb{R}^3 ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse z del dominio D del piano yz definito da

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq z \leq y\}.$$

Calcolare il volume di V e l'area della sua superficie.

3. Determinare se converge

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\arctan(x^2 y)}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

4. Sia γ la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t^2(1-t), t(1-t^2))$ con $0 \leq t \leq 1$.
 - (a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.
 - (b) Calcolare l'area del dominio racchiuso da γ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.