BY GIMUSI 31/05/15

Test 484								
	F	F	V	V	V	F	F	V
	VF1	VF2	VF3	VF4	VF5	VF6	VF7	VF8

E	A	A	E	B	C	A	B
MC1	MC2	MC3	MC4	MC5	MC6	MC7	MC8

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Test d'esame di Analisi Matematica II

♢ Questo test è composto da 8 domande di tipo Vero–Falso (per le quali la risposta va scelta tra V ed F), e da 8 domande Multiple–Choice (per le quali la risposta va scelta tra A, B, C, D, E).

♡ Le risposte devono essere indicate senza ambiguità nella griglia in cima a questa pagina.

♣ Il tempo a disposizione è di 30 minuti.

♠ Il punteggio per tutte le 16 domande è: risposta MANCANTE = 0, SBAGLIATA = –2, ESATTA = +2.

Sezione Vero-Falso

VF1 La curva $(\cos t, \sin^2 t)$ con $-1 \le t \le 1$ è semplice F

VF2 L'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione $x^2 + y^2 - xy$ è $-\infty$ F

VF3 La funzione $f(x,y) = e^{xy}$ è una primitiva della forma $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$ V

VF4 $3x^3y - 3xy^3 = +o((x^2+y^2)^{3/2})$ per $(x,y) \to (0,0)$ V

VF5 La norma del vettore $(1,-1,2)$ è $\sqrt{6}$ V

VF6 L'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \le 4\}$ è limitato F

VF7 La forma quadratica $x^2 + 2y^2 - 4xy$ è definita positiva F

VF8 Se D è il dominio dl piano xy racchiuso dalla curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $0 \le t \le 2\pi$ allora $area(D) = \int_\gamma x\,dy$ V

Sezione Multiple-Choice

MC1 Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$.

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(x,y) = x^4 + y, \quad h(x,y) = x^4 + y^3.$$

(A) Solo g (B) Solo g e h (C) Tutte (D) Solo h $\boxed{\text{(E) Nessuna}}$

$\boxed{\text{MC2}}$ Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\}$. Allora $\int_D 4\,dx\,dy = \ldots$

$\boxed{\text{(A)}\ \frac{8}{3}}$ (B) 0 (C) $\frac{16}{3}$ (D) 1 (E) $\frac{4}{3}$

$\boxed{\text{MC3}}$ Sia $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ z \ge 0\}$. Allora $\int_B 5z\,dx\,dy\,dz = \ldots$

$\boxed{\text{(A)}\ \frac{5\pi}{8}}$ (B) 0 (C) $\frac{5\pi}{12}$ (D) $\frac{5\pi}{4}$ (E) $\frac{5\pi}{6}$

$\boxed{\text{MC4}}$ Sia $D = [0,1] \times [-1,1]$. Allora $\max_D x - 5y^2 =$

(A) 4 (B) 6 (C) Non esiste (D) 0 $\boxed{\text{(E)}\ 1}$

$\boxed{\text{MC5}}$ Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$ definita per $0 \le t \le 2\pi$. Allora $\int_\gamma x\,ds =$

(A) -2π $\boxed{\text{(B)}\ \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin^2 t\,|\sin t\cos t|\,dt}$ (C) 2π (D) $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$ (E) 0

$\boxed{\text{MC6}}$ Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B (x+y)^2\,dx\,dy, \qquad \int_B \cos^2(xy)\,dx\,dy, \qquad \boxed{\int_B x^3y^3\,dx\,dy,} \qquad \int_B e^y\,dx\,dy$$

(A) 2 (B) 3 $\boxed{\text{(C)}\ 1}$ (D) 4 (E) 0

$\boxed{\text{MC7}}$ Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{(1+|y|)^{\alpha-6}}{(x^2+y^2)^4}\,dx\,dy < +\infty$$

$\boxed{\text{(A) Se e solo se } 0 < \alpha < 12}$ (B) Se e solo se $\alpha > 1$ (C) Mai

(D) Se e solo se $0 < \alpha < 1$ (E) Se e solo se $0 < \alpha < 11$

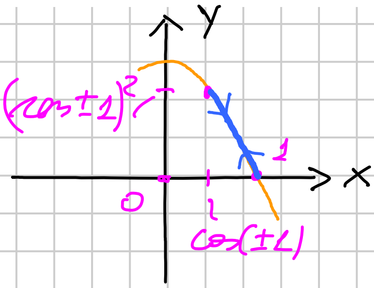
$\boxed{\text{MC8}}$ Sia $F(x,y,z) = (e^x + y, 8y, x - z)$. Allora $\operatorname{div} F =$

(A) $9 + e^x$ $\boxed{\text{(B)}\ 7 + e^x}$ (C) 1 (D) $(e^x + 1, 8, 0)$ (E) $(e^x, 8, -1)$

Sezione Vero-Falso

$\boxed{\text{VF1}}$ La curva $(\cos t, \sin^2 t)$ con $-1 \leq t \leq 1$ è semplice F

SOSTEGNO: $\begin{cases} x = \cos\sigma \\ y = \sin^2\sigma = 1 - \cos^2\sigma = 1 - x^2 \end{cases}$



$\forall \sigma \begin{cases} \cos\sigma = \cos(-\sigma) \\ \sin^2(\sigma) = \sin^2(-\sigma) \end{cases} \rightsquigarrow$ NON È SEMPLICE

$\boxed{\text{VF2}}$ L'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione $x^2 + y^2 - xy$ è $-\infty$ F

$$\begin{cases} \text{NON CI SONO PUNTI SINGOLARI } (f(x,y) \text{ CONTINUA SU } \mathbb{R}^2) \\ \lim\limits_{\rho \to +\infty} \rho^2 - \rho^2 \sin\theta\cos\theta = \lim\limits_{\rho\to+\infty} \rho^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = +\infty \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta \leq \frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{VF3}}$ La funzione $f(x, y) = e^{xy}$ è una primitiva della forma $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$ V

$$f_x(x,y) = ye^{xy} \qquad f_y(x,y) = xe^{xy}$$

$\boxed{\text{VF4}}$ $3x^3y - 3xy^3 = +o((x^2 + y^2)^{3/2})$ per $(x, y) \to (0, 0)$ V

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y - 3xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{3\rho^4\cos^3\theta\sin\theta - 3\rho^4\cos\theta\sin^3\theta}{\cancel{\rho^3}} =$$

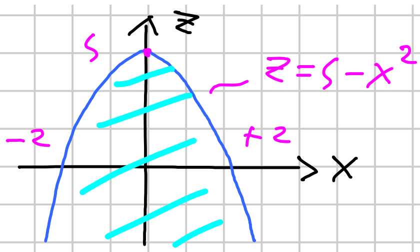
$$= \lim_{\rho \to 0} 3\rho \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta = 0$$

$\boxed{\text{VF5}}$ La norma del vettore $(1, -1, 2)$ è $\sqrt{6}$ V

$$\|(1,-1,2)\| = (1+1+4)^{1/2} = \sqrt{6}$$

$\boxed{\text{VF6}}$ L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z \leq 4\}$ è limitato F

$$y = 0 \rightsquigarrow z \leq 4 - x^2$$

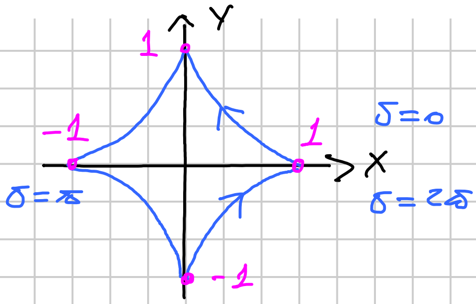


3/6

VF7 La forma quadratica $x^2 + 2y^2 - 4xy$ è definita positiva F

$$\begin{cases} x^2+2y^2-4xy = (x-2y)^2-2y^2 \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A = 2-4=-2 \rightsquigarrow \lambda_1>0 \quad \lambda_2<0 \end{cases}$$

VF8 Se D è il dominio dl piano xy racchiuso dalla curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $0 \le t \le 2\pi$ allora $area(D) = \int_\gamma x\,dy$ V



$$\vec{E} = (0, x) \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = (0, 1)$$

$$AREA(D) = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_\gamma \vec{E} \cdot \vec{T}\, ds = \int_\gamma x\, \dot{y}(t)\, dt = \int_\gamma x\, dy$$

Sezione Multiple-Choice

MC1 Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$.

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad g(x, y) = x^4 + y, \quad h(x, y) = x^4 + y^3.$$

(A) Solo g (B) Solo g e h (C) Tutte (D) Solo h $\boxed{\text{(E) Nessuna}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y=0}} x^2-y^2 = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{y\to+\infty \\ x=0}} x^2-y^2 = -\infty$ $\rightsquigarrow$ $f(x,y)$ NON HA LIMITE PER $x^2+y^2 \to +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y=0}} x^4+y = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{y\to-\infty \\ x=0}} x^4+y = -\infty$ $\rightsquigarrow$ $g(x,y)$ "

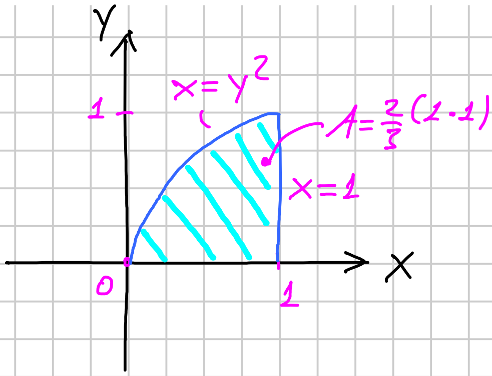
$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y=0}} x^4+y^3 = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{y\to-\infty \\ x=0}} x^4+y^3 = -\infty$ $\rightsquigarrow$ $h(x,y)$ "

$\boxed{\text{MC2}}$ Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\, y^2 \le x \le 1\}$. Allora $\int_D 4\,dx\,dy = \dots$

$\boxed{\text{(A) } \frac{8}{3}}$ (B) 0 (C) $\frac{16}{3}$ (D) 1 (E) $\frac{4}{3}$

$$\iint_D 4\,dx\,dy = 4\iint_D dx\,dy = 4\cdot\frac{2}{3}(1\cdot 1) = \frac{8}{3}$$

$$4\int_0^1\int_{y^2}^1 dx\,dy = 4\int_0^1 1-y^2\,dy = 4\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

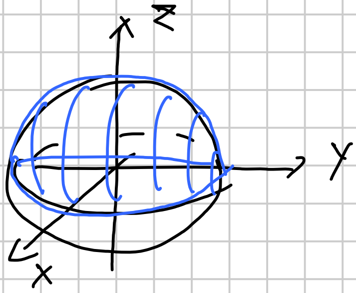


$\boxed{\text{MC3}}$ Sia $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\, x \ge 0,\, z \ge 0\}$. Allora $\int_B 5z\,dx\,dy\,dz = \dots$

$\boxed{\text{(A) } \frac{5\pi}{8}}$ (B) 0 (C) $\frac{5\pi}{12}$ (D) $\frac{5\pi}{4}$ (E) $\frac{5\pi}{6}$

$$\iiint_B 5z\,dx\,dy\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 5\rho\sin\varphi\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 5\pi\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi = \frac{5\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,\left[\rho^4/4\right]_0^1 d\varphi$$



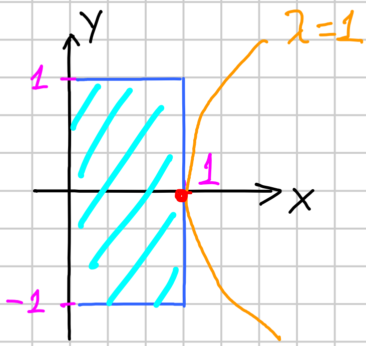
$$= \frac{5}{8}\pi\left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{8}\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}\pi$$

$\boxed{\text{MC4}}$ Sia $D = [0,1] \times [-1,1]$. Allora $\max_D x - 5y^2 =$

(A) 4 (B) 6 (C) Non esiste (D) 0 $\boxed{\text{(E) } 1}$

$$f(x,y) = x - 5y^2 = \lambda \qquad x = \lambda + 5y^2$$

$$\begin{cases} -5y^2 \text{ MIN} \rightsquigarrow y = 0 \\ x \text{ MAX} \rightsquigarrow x = 1 \end{cases} \rightsquigarrow f_{MAX} = 1$$



$\boxed{\text{MC5}}$ Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$ definita per $0 \le t \le 2\pi$. Allora $\int_\gamma x\,ds =$

(A) -2π $\boxed{\text{(B) } \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin^2 t\,|\sin t\cos t|\,dt}$ (C) 2π (D) $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt$ (E) 0

$$ds = \sqrt{(2\sin t\cos t)^2 + (-2\cos t\sin t)^2}\,dt = 2\sqrt{2}\,|\sin t\cos t|$$

$$x = \sin^2 t$$

MC6 Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B \overset{\geq 0}{(x+y)^2}\, dx\, dy, \qquad \int_B \overset{\geq 0}{\cos^2(xy)}\, dx\, dy, \qquad \boxed{\int_B x^3y^3\, dx\, dy,} \qquad \int_B \overset{\geq 0}{e^y}\, dx\, dy$$

(A) 2 (B) 3 $\boxed{\text{(C) 1}}$ (D) 4 (E) 0

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^7 \sin^3\theta \cos^3\theta \, d\rho\, d\theta$$

MC7 Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{(1+|y|)^{\alpha-6}}{(x^2+y^2)^4}\, dx\, dy < +\infty$$

$\boxed{\text{(A) Se e solo se } 0 < \alpha < 12}$ (B) Se e solo se $\alpha > 1$ (C) Mai

(D) Se e solo se $0 < \alpha < 1$ (E) Se e solo se $0 < \alpha < 11$

$$\int_B \frac{(1+|y|)^{\alpha-6}}{(x^2+y^2)^4}\, dx\, dy = \int_B \frac{(1+\rho|\sin\theta|)^{\alpha-6}}{\rho^{\cancel{8}\,7}} \cdot \cancel{\rho}\, d\rho\, d\theta = \int_B \frac{(1+\rho|\sin\theta|)^{\alpha-6}}{\rho^7}\, d\rho\, d\theta =$$

$0<\alpha<6$

$$= \int_B \frac{d\rho\, d\theta}{\rho^7(1+\rho|\sin\theta|)^{6-\alpha}} \leq \int_B \frac{1}{\rho^7}\, d\rho\, d\theta < +\infty$$

$\alpha \geq 6$

$$= \int_B \frac{(1+\rho|\sin\theta|)^{\alpha-6}}{\rho^7}\, d\rho\, d\theta \leq \int_B \frac{(2\rho)^{\alpha-6}}{\rho^7}\, d\rho\, d\theta = 2^{\alpha-6}\int_B \frac{1}{\rho^{13-\alpha}}\, d\rho\, d\theta < +\infty$$

SE $13-\alpha > 1 \rightsquigarrow \alpha < 12$

MC8 Sia $F(x,y,z) = (e^x+y, 8y, x-z)$. Allora $\operatorname{div}F =$

(A) $9+e^x$ $\boxed{\text{(B) } 7+e^x}$ (C) 1 (D) $(e^x+1, 8, 0)$ (E) $(e^x, 8, -1)$

$$\operatorname{div}F = A_x + B_y + C_z = e^x + 8 - 1 = e^x + 7$$