SOLUZIONI BY GIMUSI 30/05/15

Test 482

VF1	VF2	VF3	VF4	VF5	VF6	VF7	VF8

MC1	MC2	MC3	MC4	MC5	MC6	MC7	MC8

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Test d'esame di Analisi Matematica II

♢ Questo test è composto da 8 domande di tipo Vero–Falso (per le quali la risposta va scelta tra V ed F), e da 8 domande Multiple–Choice (per le quali la risposta va scelta tra A, B, C, D, E).

♡ Le risposte devono essere indicate senza ambiguità nella griglia in cima a questa pagina.

♣ Il tempo a disposizione è di 30 minuti.

♠ Il punteggio per tutte le 16 domande è: risposta MANCANTE = 0, SBAGLIATA = −2, ESATTA = +2.

Sezione Vero-Falso

VF1 L'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 4, \; |z| \leq 1\}$ è un solido di rotazione V

VF2 Si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}} dx < +\infty$ V

VF3 L'origine è un punto di minimo relativo per la funzione $f(x,y) = x^5 + y^6$ F

VF4 La funzione $f(x,y) = e^{x+y}$ è una primitiva della forma $e^{x+y}(dx+dy)$ V

VF5 La curva (t^2, t^4) con $0 \leq t \leq 1$ è chiusa F

VF6 $3x^3y - 3xy^3 = +o((x^2+y^2)^4)$ per $(x,y) \to (0,0)$ F

VF7 L'estremo superiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione e^{xy} è $+\infty$ V

VF8 $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^2+y^2 \geq M$ e $|x|+|y| = 1$ F

Sezione Multiple-Choice

MC1 Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{\cos^\alpha(xy)}{x^2+y^2} \, dx \, dy < +\infty$$

(A) Se e solo se $\alpha > 1$ **(B)** Mai **(C)** Se e solo se $\alpha > 0$ **(D)** Se e solo se $\alpha \neq 1$

(E) Se e solo se $0 < \alpha < 1$

MC2 Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\boxed{\int_B x\,dx\,dy,} \quad \boxed{\int_B xy\,dx\,dy} \quad \boxed{\int_B xy^2\,dx\,dy,} \quad \int_B x^2y^2\,dx\,dy$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0 (E) 4

MC3 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$ definita per $0 \le t \le 2\pi$. Allora $\int_\gamma x\,ds =$

(A) $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\,dt$ (B) -2π $\boxed{\text{(C) } \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin^2 t\,|\sin t\cos t|\,dt}$ (D) 2π (E) 0

MC4 Consideriamo il dominio $D = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2+y^2 \to +\infty$, con $(x,y) \in D$.

$$f(x,y) = x+y, \quad g(x,y) = x^5+y^5, \quad h(x,y) = \frac{y^4}{1+x^2+y^2}.$$

(A) Solo f (B) Solo f e h (C) Nessuna $\boxed{\text{(D) Solo } f \text{ e } g}$ (E) Tutte

MC5 Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ allora $\int_B 5x^2\,dx\,dy = \ldots$

$\boxed{\text{(A) } \frac{5\pi}{4}}$ (B) $\frac{5\pi}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\frac{5}{3}$

MC6 Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x^2\}$. Allora $\max_D 3x - y^2 =$

(A) 2 (B) Non esiste $\boxed{\text{(C) } 0}$ (D) -3 (E) 4

MC7 Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2\}$. Allora $\int_D y\,dx\,dy = \ldots$

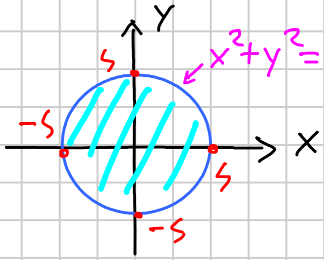
$\boxed{\text{(A) } 0}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

MC8 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Stabilire QUALE delle seguenti operazioni ha senso

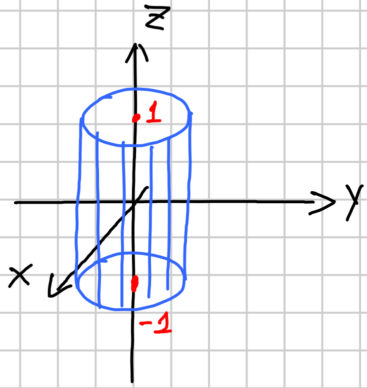
(A) $\mathrm{rot} f$ (B) $\mathrm{rot}(\mathrm{div} f)$ $\boxed{\text{(C) } \mathrm{div}(\nabla f)}$ (D) $\mathrm{div}(\mathrm{rot} f)$ (E) $\nabla(\nabla f)$

Sezione Vero-Falso

$\boxed{\text{VF1}}$ L'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 4,\ |z| \leq 1\}$ è un solido di rotazione V



$x^2+y^2=16 \equiv \sqrt{x^2+y^2}=5$



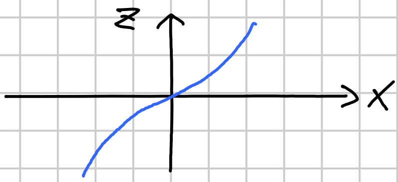
IN COORDINATE CILINDRICHE $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \rightsquigarrow \sqrt{\rho^2}=\rho \leq 5\ ,\ |z|\leq 1$

$\boxed{\text{VF2}}$ Si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}}dx < +\infty$ V

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[5]{x}}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \left[\frac{5}{3}x^{3/5}\right]_{0^+}^1 = \frac{5}{3} < +\infty$$

$\boxed{\text{VF3}}$ L'origine è un punto di minimo relativo per la funzione $f(x,y) = x^5 + y^6$ F

$\forall \varepsilon > 0 \quad f(-\varepsilon, 0) = -\varepsilon^5 < f(0,0) = 0$

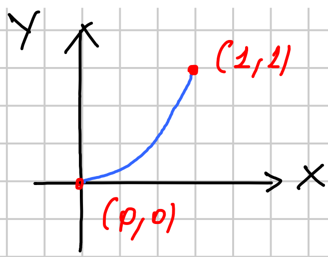


$\boxed{\text{VF4}}$ La funzione $f(x,y) = e^{x+y}$ è una primitiva della forma $e^{x+y}(dx+dy)$ V

$f_x(x,y) = e^{x+y} \qquad f_y(x+y) = e^{x+y}$

$\boxed{\text{VF5}}$ La curva (t^2, t^4) con $0 \leq t \leq 1$ è chiusa F

$\begin{cases} t=0 \rightsquigarrow (0,0) \\ \qquad\qquad \neq \\ t=1 \rightsquigarrow (1,1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t^2 \\ y=t^4=x^2 \end{cases}$



$\boxed{\text{VF6}}$ $3x^3y - 3xy^3 = +o((x^2+y^2)^4)$ per $(x,y) \to (0,0)$ F

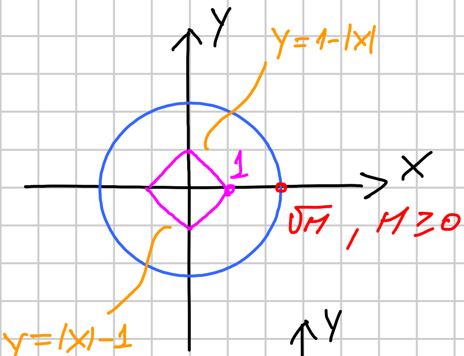
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^4} = \lim_{\rho\to0} \frac{3\cancel{\rho^4}\cos^3\theta\sin\theta - 3\cancel{\rho^4}\cos\theta\sin^3\theta}{\rho^{\cancel{8}4}} =$$

$$= \lim_{\rho\to0} \frac{3\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to0} \frac{3}{2}\,\frac{\sin2\theta\cdot\cos2\theta}{\rho^4}$$ NON ESISTE

$\boxed{\text{VF7}}$ L'estremo superiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione e^{xy} è $+\infty$ V

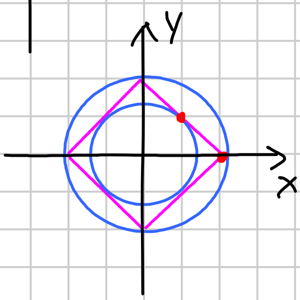
$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y=1}} e^{xy} = +\infty$$

$\boxed{\text{VF8}}$ $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^2+y^2 \geq M$ e $|x|+|y| = 1$ F



$$|x|+|y| = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} y \geq 0 & y = 1-|x| \\ y < 0 & y = |x|-1 \end{cases}$$

$$M > 1 \quad \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ |x|+|y| = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$$



$\rightsquigarrow$ SOLUZIONI PER $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq M \leq 1$

Sezione Multiple-Choice

$\boxed{\text{MC1}}$ Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

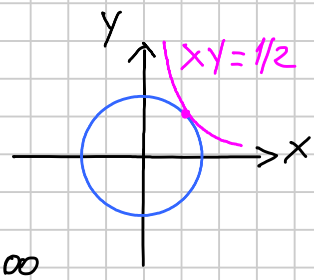
$$\int_B \frac{\cos^\alpha(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy < +\infty$$

(A) Se e solo se $\alpha > 1$ (B) Mai (C) Se e solo se $\alpha > 0$ (D) Se e solo se $\alpha \neq 1$

(E) Se e solo se $0 < \alpha < 1$

$$\int_B \frac{\cos^2(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \geq \int_B \frac{\cos^2(1/2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \cos^2(1/2)\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho}\,d\rho\,d\theta = 2\pi\cos^2(1/2)\cdot\lim_{k\to0}\left[\log\rho\right]_k^1 \rightsquigarrow +\infty$$

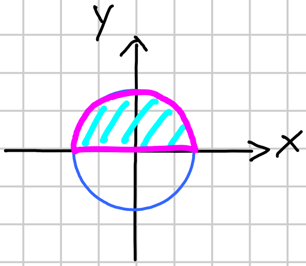


5/6

MC2 Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\boxed{\int_B x\,dx\,dy,} \quad \boxed{\int_B xy\,dx\,dy,} \quad \boxed{\int_B xy^2\,dx\,dy,} \quad \int_B x^2y^2\,dx\,dy$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0 (E) 4



MC3 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$ definita per $0 \le t \le 2\pi$. Allora $\int_\gamma x\,ds =$

(A) $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$ (B) -2π $\boxed{\text{(C) } \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin^2 t\,|\sin t\cos t|\,dt}$ (D) 2π (E) 0

$$x = \sin^2 t \qquad ds = \left[(2\sin t\cos t)^2 + (-2\cos t\sin t)^2\right]^{1/2} = 2\sqrt{2}\,|\sin t\cos t|$$

$$\int_\gamma x\,ds = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin^2 t\,|\sin t\cos t|\,dt$$

MC4 Consideriamo il dominio $D = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2+y^2 \to +\infty$, con $(x,y) \in D$.

$$f(x,y) = x+y, \quad g(x,y) = x^5+y^5, \quad h(x,y) = \frac{y^4}{1+x^2+y^2}.$$

(A) Solo f (B) Solo f e h (C) Nessuna $\boxed{\text{(D) Solo } f \text{ e } g}$ (E) Tutte

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = \lim_{\rho\to+\infty} \rho\underbrace{(\cos\theta+\sin\theta)}_{>0}^{0\le\theta\le\pi/2} = +\infty$$

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} g(x,y) = \lim_{\rho\to+\infty} \rho^5\underbrace{(\cos^5\theta+\sin^5\theta)}_{>0}^{0\le\theta\le\pi/2} = +\infty$$

NON ESISTE

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} h(x,y) = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{\rho^4\sin^4\theta}{1+\rho^2} = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{\rho^2\sin^4\theta}{1+1/\rho^2} \begin{cases} \theta = 0 & = 0 \\ 0 < \theta \le \frac{\pi}{2} & = +\infty \end{cases}$$

$\boxed{\text{MC5}}$ Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ allora $\int_B 5x^2\,dx\,dy = \ldots$

$\boxed{\text{(A) } \frac{5\pi}{4}}$ (B) $\frac{5\pi}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\frac{5}{3}$

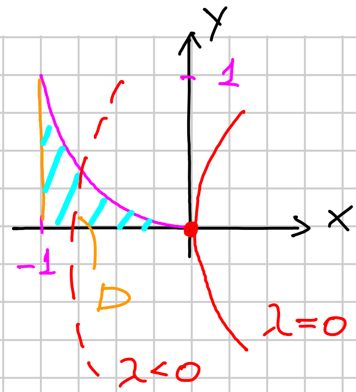
$$\int_B 5x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 5\rho^3\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = 5\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\left[\rho^4/4\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{5}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{5}{4}\pi$$

$\boxed{\text{MC6}}$ Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x^2\}$. Allora $\max_D 3x - y^2 =$

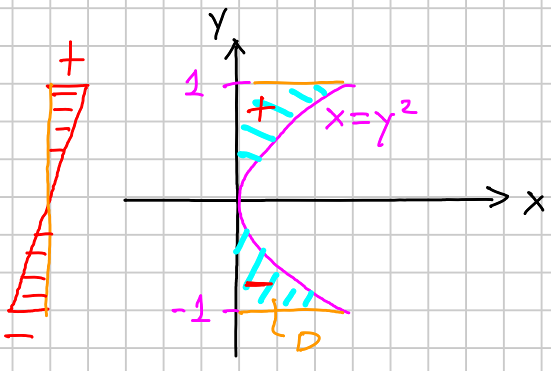
(A) 2 (B) Non esiste $\boxed{\text{(C) } 0}$ (D) -3 (E) 4

$f(x,y) = 3x - y^2 = \lambda$ $\quad x = \frac{1}{3}y^2 + \frac{\lambda}{3}$



$\boxed{\text{MC7}}$ Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2\}$. Allora $\int_D y\,dx\,dy = \ldots$

$\boxed{\text{(A) } 0}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$



$\boxed{\text{MC8}}$ Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Stabilire QUALE delle seguenti operazioni ha senso

(A) rot$f$ (1) NO (B) rot(div$f$) (2) NO (C) $\boxed{\text{div}(\nabla f)}$ (D) div(rot$f$) (1) NO (E) $\nabla(\nabla f)$ (3) OK (3) NO

1) rot : VETTORE → VETTORE

2) div : VETTORE → SCALARE

3) ∇ : SCALARE → VETTORE