1. Consideriamo i seguenti 4 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, 0), \qquad D = (0, 1, 1).$$

(a) Determinare il punto del piano ABC più vicino a D.

(b) Determinare il punto della retta AB più vicino a D.

$A-B = (1,-2,1)$, $C-B = (-1,0,0)$ vett. $\perp$ $(0,1,2)$ (a occhio)

piano ABC: $y+2z-2=0$ (verifica ok)

retta per D $\perp$ al piano: $(0,1,1)+t(0,1,2) = (0, 1+t, 1+2t)$

Sostituisco nel piano: $(1+t)+2(1+2t)-2=0$, $1+t+\cancel{2}+4t-\cancel{2}=0$, $5t=-1$

$t=-\frac{1}{5}$ $\rightsquigarrow$ $(0,1,1)-\frac{1}{5}(0,1,2) = \boxed{\left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)}$

Verifica: sta sul piano $\frac{4}{5}+\frac{6}{5}-2=0$ e $D-\left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ è $\perp$ al piano

(b) Retta AB: $(1,0,1)+t(-1,2,-1) = (1-t, 2t, 1-t)$

$\text{dist}^2(\text{p.to}, D) = (1-t)^2+(2t-1)^2+(\cancel{1}-t-\cancel{1})^2 = 1-2t+t^2+4t^2-4t+1+t^2$

$= 6t^2-6t+2$

Minimo quando $12t-6=0$, cioè $t=\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)}$

Alternativa: piano per D e $\perp$ a retta AB: $-x+2y-z-1=0$

Intersezione piano – retta:

$-(1-t)+2(2t)-(1-t)-1=0$, $-1+t+4t-1+t-1=0$, $6t=3$, $t=\frac{1}{2}$

come prima.

— o — o —

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali λ e μ, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 5 \\ y + \lambda z &= \mu \\ 2x + 3y - \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione unica.

(b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix}$ Sol. unica $\iff$ det $\neq 0$ $\iff$ $-\lambda + 2\lambda + 4 - 3\lambda \neq 0$

$\iff 2\lambda \neq 4 \iff \boxed{\lambda \neq 2}$

(b) Per avere soluzione non unica serve $\lambda = 2$ e che la matrice completa abbia rango 2, il che è equivalente a dire che la colonna dei termini noti dipende lin. dalle prime 2 colonne

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \mu \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Det $= 0 \iff 2 + 2\mu - 10 - 3\mu = 0 \iff \mu = -8$

Quindi c'è soluzione non unica per $\boxed{\lambda = 2 \text{ e } \mu = -8}$

Risolviamo esplicitamente:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ y + 2z = -8 \end{cases}$ $z = t, \quad y = -2z - 8 = -2t - 8$

$x = -y + 2z + 5 = 2t + 8 + 2t + 5 = 4t + 13$

$\boxed{(x, y, z) = (13, -8, 0) + t(4, -2, 1)}$ VERIFICA NEL SISTEMA INIZIALE

— o — o —

3. Consideriamo le seguenti 3 condizioni:

$$\overset{v_1}{f(0,1,1)} = (1,2,3), \qquad \overset{v_2}{f(2,-1,0)} = (0,1,0), \qquad \overset{v_3}{f(0,0,1)} = (-1,3,\overset{-3}{\cancel{3}}).$$

(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte.

(b) Determinare la dimensione ed una base per il nucleo e l'immagine di f.

(c) Determinare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica (in partenza ed arrivo).

(a) Basta verificare che in partenza si ha una base e poi usare il teorema di struttura.

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

(b)

Det $\neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Det generale: $-3+3=0$

Quindi $\boxed{\text{rango} = \dim \text{immagine} = 2}$ e quindi $\boxed{\dim \ker = 1}$

Base dell'immagine: $\boxed{(1,2,3),\ (0,1,0)}$

Per la base del ker impongo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad z=1,\ y=-5,\ x=1$$

Quindi un elemento del ker è $1\cdot(0,1,1) - 5(2,-1,0) + 1\cdot(0,0,1) = (-10,6,2)$

Base del ker: $\boxed{(-10,6,2)}$ oppure $\boxed{(-5,3,1)}$

(c) La matrice A di sopra rappresenta f dalla base v_1, v_2, v_3 alla canonica. Devo quindi cambiare base in partenza

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa manda: comp. risp. v_1, v_2, v_3 $\to$ comp. risp. canonica

Calcolo l'inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & +1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$$

Matrice dalla canonica alla canonica

Potrei fare un po' di verifiche, e cioè che

$(0,1,1) \to (1,2,3)$

$(2,-1,0) \to (0,1,0)$

$(0,0,1) \to (-1,3,-3)$

$(-10,6,2) \to (0,0,0)$

Queste tornano e quindi sono contento.

In alternativa potevo cercare la matrice a coeff. incogniti e fare il sistemone 9×9 imponendo le condizioni.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

— o — o —

4. Consideriamo, nel piano cartesiano, il punto $P = (2, -1)$ e la retta r di equazione $x - 2y + 5 = 0$.

   (a) Scrivere la trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di 90° in senso *orario* intorno al punto P.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta r.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana della retta la cui immagine è la retta r.

(a) Rotazione di 90° <u>oraria</u> intorno all'origine $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Intorno al punto P

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1+2 \\ -x+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 \\ -x+1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'espressione è $\boxed{(x,y) \to (y+3, -x+1)}$

(b) La retta r ha equazione parametrica $(-5,0) + t\,(2,1)$

Applico la trasf. al punto base $(-5,0) \longrightarrow (3,6)$

Ruoto la direzione (applico la sola matrice) : $(2,1) \to (1,-2)$

L'immagine di r ha eq. parametrica $(3,6) + t\,(1,-2)$

$x = 3+t \quad \rightsquigarrow \; t = x-3 \rightsquigarrow \; y = 6-2x+6 = 12-2x$

$y = 6-2t$

Equazione cartesiana dell'immagine : $\boxed{y+2x-12=0}$

<u>Alternativa</u> : prendo la param. di r $\quad (x,y) = (-5+2t, t)$

sostituisco nella trasformazione e ottengo

$(t+3, 6-2t)$

che è la param. dell'immagine di r.

Torno in cartesiana:

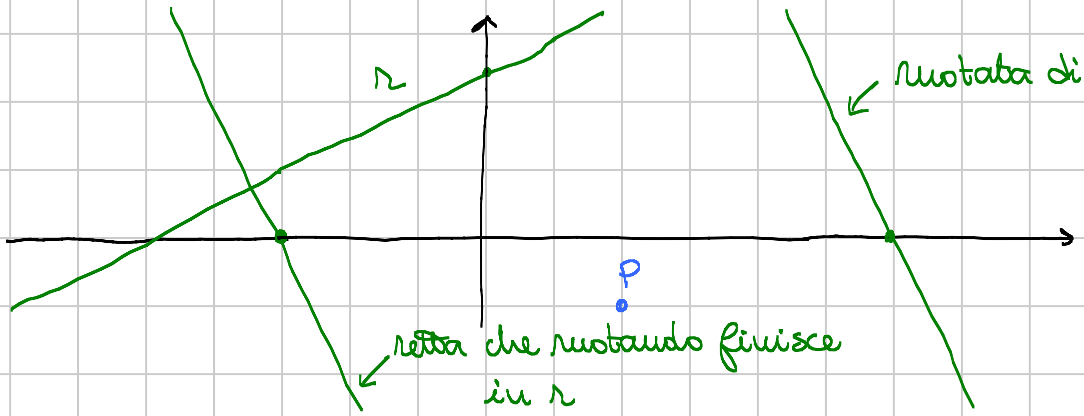
$x = t+3 \quad \rightsquigarrow \; t = x-3 \rightsquigarrow \; y = 6-2x+6 = -2x+12.$

$y = 6-2t$

Ovviamente coincide ☺

(c) Per determinare la retta la cui immagine è r basta sostituire l'espressione della trasformazione nell'equazione di r:

$$\begin{array}{cccc} x & -2y & +5 & =0 \\ y+3 & -2(-x+1) & +5 & =0 \end{array} \qquad y+3+2x-2+5=0 \qquad \boxed{2x+y+6=0}$$



Alternativa: la cerco del tipo $(a+bt, c+dt)$.
La sua immagine sarebbe

$$(c+dt+3,\ 1-a-bt) = (-5+2t, t)$$

da cui $c=-8,\ d=2,\ a=1,\ b=-1 \rightsquigarrow (x,y)=(1-t, -8+2t)$

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y=-8+2t \end{cases} \rightsquigarrow t = 1-x \rightsquigarrow y=-8+2-2x = -2x-6$$

che è la stessa ☺