

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 27 Gennaio 2014

1. Consideriamo i seguenti 4 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (0, 2, 0), \quad C = (-1, 2, 0), \quad D = (0, 1, 1).$$

- (a) Determinare il punto del piano ABC più vicino a D .
- (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a D .

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali λ e μ , il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 5 \\ y + \lambda z &= \mu \\ 2x + 3y - \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

- (a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione unica.
- (b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo le seguenti 3 condizioni:

$$f(0, 1, 1) = (1, 2, 3), \quad f(2, -1, 0) = (0, 1, 0), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 3, -3).$$

- (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte.
- (b) Determinare la dimensione ed una base per il nucleo e l'immagine di f .
- (c) Determinare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica (in partenza ed arrivo).

4. Consideriamo, nel piano cartesiano, il punto $P = (2, -1)$ e la retta r di equazione $x - 2y + 5 = 0$.

- (a) Scrivere la trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di 90° in senso *orario* intorno al punto P .
- (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta r .
- (c) Determinare l'equazione cartesiana della retta la cui immagine è la retta r .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.