Prodotti scalari – Esercizi teorici 1

Argomenti: prodotti scalari generali **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: prodotti scalari, teorema spettrale

---

1. (Prodotti scalari degeneri e non degeneri) Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V si dice *degenere* se esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$ (in altre parole, v è ortogonale rispetto a tutti i vettori dello spazio). Si dice *non degenere* in caso contrario.

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è degenere se e solo se la matrice che lo rappresenta rispetto ad una qualunque base di V è singolare.

   (b) Dimostare che l'insieme V_0 dei vettori che sono ortogonali rispetto a tutti i vettori dello spazio è un sottospazio vettoriale, e che la dimensione di tale sottospazio è uguale al numero di autovalori nulli della matrice.

   (c) Sia V_1 un sottospazio vettoriale di V tale che $V = V_0 \oplus V_1$. Dimostrare che il prodotto scalare ristretto a V_1 è non degenere, cioè che non esiste nessun vettore non nullo in V_1 che sia ortogonale a tutti i vettori di V_1.

   (d) Sia W un sottospazio vettoriale di V, e sia $W^\perp$ l'ortogonale di W rispetto al prodotto scalare. Dimostrare che, se il prodotto scalare è non degenere, allora $W \cap W^\perp = \{0\}$. Cosa succede in generale?

2. (Vera definizione di segnatura) Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Definiamo n_+ come la massima dimensione di un sottospazio su cui il prodotto scalare risulta definito positivo, cioè come il più grande intero k per cui esiste un sottospazio W di V di dimensione k tale che $\langle w, w \rangle \overset{>}{\cancel{=}} 0$ per ogni $w \in W$ con $w \neq 0$. Analogamente, definiamo n_- come la massima dimensione di un sottospazio su cui il prodotto scalare risulta definito negativo.

   (a) Dimostrare che n_+ ed n_- coincidono, rispettivamente, con il numero di autovalori positivi e negativi della matrice che rappresenta il prodotto scalare rispetto ad una qualunque base di V.

   (b) Sia W un sottospazio di dimensione n_+ su cui il prodotto scalare è definito positivo. Dimostrare che $W \cap W^\perp = \{0\}$ (anche se il prodotto scalare è degenere) e che il prodotto scalare è semidefinito negativo su $W^\perp$. Cosa possiamo dire in più se il prodotto scalare è non degenere?

   (c) Dimostrare che possiamo sempre scrivere

   $$V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-,$$

   dove V_0 è il sottospazio definito al primo punto, V_+ è un sottospazio su cui il prodotto scalare è definito positivo, V_- è un sottospazio su cui il prodotto scalare è definito negativo, e vettori appartenenti a sottospazi diversi sono tra loro ortogonali (in questo caso si parla di somma diretta ortogonale). I sottospazi V_+ e V_- sono univocamente determinati?

SOLUZIONI?
BY GIMUSI 08/02/2015

1. (Prodotti scalari degeneri e non degeneri) Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V si dice *degenere* se esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$ (in altre parole, v è ortogonale rispetto a tutti i vettori dello spazio). Si dice *non degenere* in caso contrario.

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è degenere se e solo se la matrice che lo rappresenta rispetto ad una qualunque base di V è singolare.

$\exists v \neq 0$ T.C. $\forall w \in V \quad \langle v, w \rangle = 0$

BASE DI V: $\{ v, v_2, \dots, v_n \}$

$$B = \begin{pmatrix} \langle v,v \rangle & \langle v,v_2 \rangle & \dots & \langle v,v_n \rangle \\ \langle v_2,v \rangle & \langle v_2,v_2 \rangle & \dots & \langle v_2,v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \\ \langle v_n,v \rangle & \dots & & \langle v_n,v_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{SINGOLARE}$$

CAMBIO DI BASE: $\quad X = M\hat{X}$

$$X^T B X \rightsquigarrow \hat{X}^T M^T B M \hat{X} = \hat{X}^T \hat{B} \hat{X} \qquad \hat{B} = M^T B M$$

$$BM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \boxed{} & & \end{pmatrix}$$ É SINGOLARE $\rightsquigarrow \exists \hat{v} \neq 0$ T.C. $(BM)\hat{v} = 0$

$\rightsquigarrow \hat{B} = M^T(BM)$ É SINGOLARE

INFATTI: $\hat{B}\hat{v} = M^T B M \hat{v} = M^T (BM)\hat{v} = M^T \cdot 0 = 0$

   (b) Dimostare che l'insieme V_0 dei vettori che sono ortogonali rispetto a tutti i vettori dello spazio è un sottospazio vettoriale, e che la dimensione di tale sottospazio è uguale al numero di autovalori nulli della matrice.

SIANO $v_1, v_2 \in V$ T.C. $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = 0 \\ \langle a v_1, w \rangle = a \langle v_1, w \rangle = 0 \end{cases}$$

QUINDI $V_0 = \{ v \in V \text{ T.C. } \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in V \} \subseteq V$ É UN S.S.V. DI V

MOSTRIAMO CHE: $\quad u \in V_0 \iff u \in \ker(B)$

INFATTI:

$$\begin{cases} u \in \ker(B) \quad Bu = 0 \quad w^T B u = \langle w, u \rangle = 0 \ \forall w \in V \rightsquigarrow u \in V_0 \\ u \in V_0 \ \langle w, u \rangle = w^T B u = 0 \ \forall w \in V \rightsquigarrow Bu = 0 \quad u \in \ker(B) \end{cases}$$

SIANO $v_1, v_2, \dots, v_k$ BASE $\ker \equiv$ AUTOVETTORI DI B CON $\lambda_i = 0$

B É SIMMETRICA $\rightsquigarrow$ $\dim(V_0) = \dim(\ker(B)) = MA = MG = K$

(c) Sia V_1 un sottospazio vettoriale di V tale che $V = V_0 \oplus V_1$. Dimostrare che il prodotto scalare ristretto a V_1 è non degenere, cioè che non esiste nessun vettore non nullo in V_1 che sia ortogonale a tutti i vettori di V_1.

$V = V_0 \oplus V_2$

PER GRASSMANN

$\dim V_0 + \dim(V_2) = \dim(V_0 + V_2) = \dim(V) \qquad \dim(V_0 \cap V_2) = 0$

SUPPONIAMO CHE $\exists\, v_2 \in V_2$ S.C. $w_2^{\delta} B v_2 = 0 \quad \forall\, w_2 \in V_2$

$\rightsquigarrow v_2 \in V_0 \quad \rightsquigarrow v_2 \in V_0 \cap V_2 = \{0\} \iff v_2 = 0$

(d) Sia W un sottospazio vettoriale di V, e sia $W^\perp$ l'ortogonale di W rispetto al prodotto scalare. Dimostrare che, se il prodotto scalare è non degenere, allora $W \cap W^\perp = \{0\}$. Cosa succede in generale?

$W \subseteq V \quad W^\perp = \{ w \in V \text{ S.C } \langle v, w \rangle = 0 \ \forall v \in W \}$

SIA $u \in W \cap W^\perp \rightsquigarrow \quad \langle u, u \rangle = u^T B u = 0 \iff u = 0$

INFATTI $\ker(B) = \{0\} \rightsquigarrow u^T B u \neq 0 \quad \forall u \neq 0$

ALLORA $W \cap W^\perp = \{0\}$

IN GENERALE:

$W \cap W^\perp = W \cap \ker(B) \rightsquigarrow 0 \leq \dim(W \cap W^\perp) \leq \dim(\ker(B))$

2. (Vera definizione di segnatura) Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Definiamo n_+ come la massima dimensione di un sottospazio su cui il prodotto scalare risulta definito positivo, cioè come il più grande intero k per cui esiste un sottospazio W di V di dimensione k tale che $\langle w, w \rangle > 0$ per ogni $w \in W$ con $w \neq 0$. Analogamente, definiamo n_- come la massima dimensione di un sottospazio su cui il prodotto scalare risulta definito negativo.

(a) Dimostrare che n_+ ed n_- coincidono, rispettivamente, con il numero di autovalori positivi e negativi della matrice che rappresenta il prodotto scalare rispetto ad una qualunque base di V.

B MATRICE SIMMETRICA CHE RAPPRESENTA UN PRODOTTO SCALARE SU V RISPETTO AD UNA BASE ASSEGNATA

PER TEOREMA SPETTRALE B È DIAGONALIZZABILE

$$\rightsquigarrow \exists M \text{ ORTOGONALE T.C. } M^{-1}BM = M^T B M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

SIANO: $\begin{cases} n_+ = n^\circ \text{ DI AUTOVALORI POSITIVI} \\ n_- = n^\circ \text{ DI AUTOVALORI NEGATIVI} \end{cases}$

GLI AUTOVETTORI CORRISPONDENTI $x_1, x_2, \dots, x_n$ SONO UNA BASE ORTONORMALE DI V

$$\langle x_i ; x_i \rangle = x_i^T B x_i = \lambda_i x_i^T x_i = \lambda_i$$

$$\forall w \in V \quad w = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$\langle w, w \rangle = \sum \langle a_i x_i , a_j x_j \rangle = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_n a_n^2$$

SIA $V_+ = \{ w \in V \text{ t.c. } \langle w, w \rangle > 0 \quad w \neq 0 \} \subseteq V$

ALLORA:

V_+ È UN S.S.V. DI V $[\langle w_1 + w_2 , w_1 + w_2 \rangle > 0 , \langle a w_1 , a w_1 \rangle > 0]$

UNA BASE È $\{ x_i \text{ t.c. } B x_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i > 0 \}$

$\rightsquigarrow \dim V_+ = n_+$

SIA $V_- = \{ w \in V$ t.c. $\langle w, w \rangle < 0 \quad w \neq 0 \} \subseteq V$

ALLORA:

V_- È S.S.V. DI V $[\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle < 0 \ , \ \langle a w_1, a w_1 \rangle < 0]$

UNA BASE È $\{ x_i$ t.c. $B x_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i < 0 \}$

$\rightsquigarrow \dim V_- = n_-$

RISPETTO AD UN'ALTRA BASE:

SIA N = MATRICE DI C.B.: $N\mu^* = \mu$

NUOVA MATRICE ASSOCIATA: $\hat{B} = N^t B N \quad (\hat{B}^t = \hat{B})$

ANALOGAMENTE A PRIMA:

AUTOVETTORI DI $\hat{B}$ AUTOVALORI DI $\hat{B}$

$$\begin{cases} \langle \hat{x}_i, \hat{x}_i \rangle = \hat{x}_i^t \hat{B} \hat{x}_i = \hat{\lambda}_i \hat{x}_i^t \hat{x}_i = \hat{\lambda}_i \\ \forall \hat{w} \in V \quad \hat{w} = \hat{a}_1 \hat{x}_1 + \hat{a}_2 \hat{x}_2 + \dots + \hat{a}_n \hat{x}_n \\ \langle \hat{w}, \hat{w} \rangle = \hat{\lambda}_1 \hat{a}_1^2 + \hat{\lambda}_2 \hat{a}_2^2 + \dots + \hat{\lambda}_n \hat{a}_n^2 \\ \dim \hat{V}_+ = \hat{n}_+ \quad \text{E} \quad \dim \hat{V}_- = \hat{n}_- \end{cases}$$

RISULTA ANCHE:

AUTOVETTORE i-ESIMO DI B NELLA NUOVA BASE

$$\begin{cases} \langle x_i, x_i \rangle = x_i^t B x_i = (N x_i^*)^t B (N x_i^*) = x_i^{*t} \hat{B} x_i^* = \langle x_i^*, x_i^* \rangle = \lambda_i \\ \forall \hat{w} \in V \quad \hat{w} = a_1^* x_1^* + a_2^* x_2^* + \dots + a_n^* x_n^* \\ \langle \hat{w}, \hat{w} \rangle = \sum \langle a_i^* x_i^*, a_j^* x_j^* \rangle = \lambda_1 a_1^{*2} + \lambda_2 a_2^{*2} + \dots + \lambda_n a_n^{*2} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \begin{cases} n_+ = \hat{n}_+ \\ n_- = \hat{n}_- \end{cases}$ B E $\hat{B}$ HANNO LA STESSA SEGNATURA

(b) Sia W un sottospazio di dimensione n_+ su cui il prodotto scalare è definito positivo. Dimostrare che $W \cap W^\perp = \{0\}$ (anche se il prodotto scalare è degenere) e che il prodotto scalare è semidefinito negativo su $W^\perp$. Cosa possiamo dire in più se il prodotto scalare è non degenere?

$$\begin{cases} W = \{ w \in V \text{ t.c. } \langle w, w \rangle > 0 \ \forall w \neq 0 \} \\ W^\perp = \{ v \in V \text{ t.c. } \forall w \in W \ \langle v, w \rangle = 0 \} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow u \in W \cap W^\perp \iff u = 0 \rightsquigarrow W \cap W^\perp = \{0\}$

SIANO $v_1, v_2 \in W^\perp$ $\langle v_1, v_2 \rangle \begin{cases} = 0 & \text{SE } v_1 \text{ o } v_2 \in \ker(B) \\ < 0 & \text{NEGLI ALTRI CASI} \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ IL PRODOTTO SCALARE È SEMIDEF. NEGATIVO SU $W^\perp$

SE NON È DEGENERE $\iff \ker(B) = \{0\} \rightsquigarrow W^\perp$ È DEF. NEGATIVO

(c) Dimostrare che possiamo sempre scrivere

$$V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-,$$

dove V_0 è il sottospazio definito al primo punto, V_+ è un sottospazio su cui il prodotto scalare è definito positivo, V_- è un sottospazio su cui il prodotto scalare è definito negativo, e vettori appartenenti a sottospazi diversi sono tra loro ortogonali (in questo caso si parla di somma diretta ortogonale). I sottospazi V_+ e V_- sono univocamente determinati?

PER LE COSE VISTE IN PRECEDENZA:

$V_0 = \{ v \in V \text{ t.c. } \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in V \} \subseteq V$

$\rightsquigarrow V_0$ È S.S.V. DI V E $\dim(V_0) = \dim(\ker(B)) = n_0$

$V_+ = \{ v \in V \text{ t.c. } \langle v, v \rangle > 0 \ v \neq 0 \} \subseteq V$

$\rightsquigarrow V_+$ È S.S.V. DI V E $\dim(V_+) = n_+$

DEFINIAMO V_- COME:

$V_+^\perp = V_- \oplus V_0$

$\rightsquigarrow V_- = \{ v \in V \text{ t.c. } \langle v, v \rangle < 0 \ v \neq 0 \}$

$\rightsquigarrow V_-$ È S.S.V. DI V E $\dim(V_-) = n_-$

RISULTA:

$V_+ \cap V_- = \{0\} \rightsquigarrow \dim(V_+) + \dim(V_-) = \dim(V_+ \oplus V_-) = n_+ + n_-$

$V_+ \cap V_0 = \{0\}$ E $V_- \cap V_0 = \{0\} \rightsquigarrow (V_+ \oplus V_-) \cap V_0 = \{0\}$

$\rightsquigarrow \dim(V_+ \oplus V_-) + \dim(V_0) = \dim(V_+ \oplus V_- \oplus V_0) = n_+ + n_- + n_0 = n$

$\rightsquigarrow V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$

SIA $w \in V_0$ $v \in V_+ \rightsquigarrow v + w \in V_+$ INFATTI

$\langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2 \langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle > 0 \quad v \neq 0$

$\rightsquigarrow$ V_+ E V_- NON SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATI