Isometrie del piano 1

Argomenti: isometrie del piano **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: isometrie nel piano, matrici ortogonali

---

1. (a) Descrivere l'insieme di tutte le matrici 2×2 ortogonali.
   (b) Determinare quali matrici ortogonali hanno determinante uguale a $+1$ e quali hanno determinante uguale a -1.
   (c) Determinare chi sono gli autovalori delle matrici ortogonali descritte al punto precedente. Nel caso di autovalori reali, determinare anche i rispettivi autospazi.

2. Scrivere le espressioni generali delle seguenti isometrie del piano:
   (a) traslazione di vettore (x_0, y_0),
   (b) simmetria rispetto alla retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$,
   (c) simmetria rispetto alla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0) + t(a, b)$,
   (d) rotazione antioraria di un angolo θ rispetto all'origine,
   (e) rotazione antioraria di un angolo θ rispetto al punto (x_0, y_0),
   (f) rotazione oraria di un angolo θ rispetto al punto (x_0, y_0),
   (g) simmetria centrale rispetto all'origine (in quale delle precedenti categorie rientra?)
   (h) simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) (in quale delle precedenti rientra?),
   (i) simmetria rispetto alla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0) + t(a, b)$, seguita da una traslazione di vettore (a, b).

3. Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo . . .
   (a) prima la traslazione di vettore (x_0, y_0) e poi la traslazione di vettore (x_1, y_1),
   (b) prima la simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) e poi la simmetria centrale rispetto al punto (x_1, y_1),
   (c) prima la simmetria rispetto ad una retta e poi nuovamente la simmetria rispetto alla stessa retta,
   (d) prima la simmetria rispetto ad una retta r e poi la simmetria rispetto ad una retta r' parallela ad r,
   (e) prima la simmetria rispetto ad una retta r e poi la simmetria rispetto ad una retta r' incidente con r,
   (f) prima la rotazione *antioraria* di un angolo θ rispetto ad un punto (x_0, y_0) e poi la rotazione *oraria* di un angolo θ rispetto ad un punto (x_1, y_1), eventualmente diverso dal precedente,
   (g) prima la rotazione antioraria di un angolo θ_0 rispetto ad un punto (x_0, y_0) e poi la rotazione antioraria di un angolo θ_1, eventualmente diverso dal precedente, rispetto ad un punto (x_1, y_1), eventualmente diverso dal precedente.

SOLUZIONI ?
BY GIMUSI 26/01/15

1. (a) Descrivere l'insieme di tutte le matrici 2×2 ortogonali.

(b) Determinare quali matrici ortogonali hanno determinante uguale a $+1$ e quali hanno determinante uguale a -1.

(c) Determinare chi sono gli autovalori delle matrici ortogonali descritte al punto precedente. Nel caso di autovalori reali, determinare anche i rispettivi autospazi.

(a)
$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{A^T}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \quad a=\cos\theta \quad b=\sin\theta \quad c=\pm\sin\theta \quad b=\mp\cos\theta \rightsquigarrow c^2+d^2=1$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

(b)
$$\begin{cases} DET(A) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1 \\ DET(B) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \end{cases}$$

(c)
$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = -\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos\theta-1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta-1 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sin^2\theta & \sin\theta(\underbrace{-1-\cos\theta}_{=0 \quad \theta=\pi+2k\pi}) \\ \sin^2\theta & \sin\theta(-1-\cos\theta) \end{pmatrix} X = 0$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \forall\theta \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \lambda_2 = -1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos\theta+1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta+1 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sin^2\theta & \sin\theta(\underbrace{1-\cos\theta}_{=0 \quad \theta=0+2k\pi}) \\ \sin^2\theta & \sin\theta(1-\cos\theta) \end{pmatrix} X = 0 \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \forall\theta \neq 0+2k\pi$$

OSS. $\theta = \pi+2k\pi \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \theta = 0+2k\pi \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + \sin^2\theta =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0 \qquad \lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

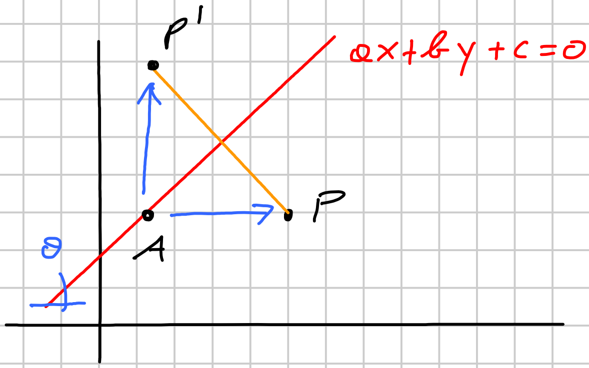
2. Scrivere le espressioni generali delle seguenti isometrie del piano:

(a) traslazione di vettore (x_0, y_0),
(b) simmetria rispetto alla retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$,
(c) simmetria rispetto alla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0) + t(a, b)$,
(d) rotazione antioraria di un angolo θ rispetto all'origine,
(e) rotazione antioraria di un angolo θ rispetto al punto (x_0, y_0),
(f) rotazione oraria di un angolo θ rispetto al punto (x_0, y_0),
(g) simmetria centrale rispetto all'origine (in quale delle precedenti categorie rientra?)
(h) simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) (in quale delle precedenti rientra?),
(i) simmetria rispetto alla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0) + t(a, b)$, seguita da una traslazione di vettore (a, b).

(a) $P = I\,P + (x_0, y_0)$

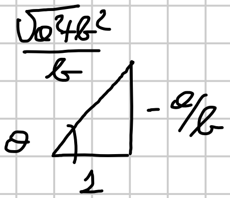
(b) MODO 1

$r: ax+by+c=0 \quad A \in r$



$$\begin{cases} \theta = \arctan(-a/b) \; [+\pi] \\ \alpha = 2\theta \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow (P'-A) = S(P-A)$$



$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2b^2}{a^2+b^2} - 1 = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \\ \sin\alpha = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{2ab}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow P' = S(P-A) + A$

MODO 2

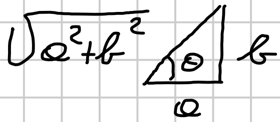
$v_1 = (b, -a) \parallel r \qquad v_2 = (a, b) \perp r$

IN BASE $\{v_1, v_2\}$: $\quad S_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (P'-A)_\mathcal{E} = S_\mathcal{E}(P-A)_\mathcal{E}$

IN BASE CANONICA:

$$M = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \rightsquigarrow S = M S_\mathcal{E} M^{-1}$$

(c) $r: (x_0,y_0)+\sigma(a,b)$



MODO 1 COME P.TO (b) MA CON $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

MODO 2 COME P.TO (b) MA CON $V_1=(a,b)$ $V_2=(-b,a)$

(d) $P'=SP$ $\quad S=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(e) $P_0=(x_0,y_0)$ $\quad (P'-P_0)=(P-P_0)S \rightsquigarrow P'=(P-P_0)S+P_0$

(f) $P'=(P-P_0)\hat{S}+P_0$ $\quad \hat{S}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta)\\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

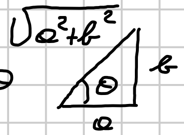
(g) $P'=-IP$ EQ. A (d) CON $\theta=\pi$ $(S=-I)$

(h) $P_0=(x_0,y_0)$ $\quad (P'-P_0)=-(P-P_0)I \rightsquigarrow P'=-P+2P_0$

EQ. A (e) E (f) CON $\theta=\pi$ $(S=\hat{S}=-I)$

(i) $S=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \rightsquigarrow (P'-A)=S(P-A)+(a,b)$ $\quad A\in r$

$\alpha=2\theta$

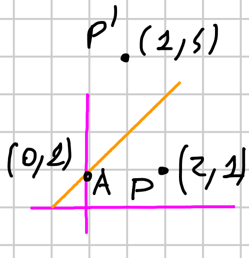


$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \operatorname{sen}\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \cos\alpha=\cos 2\theta = 2\dfrac{a^2}{a^2+b^2}-1=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}2\theta=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

$\rightsquigarrow P'=S(P-A)+A+(a,b)$ $\quad S=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ 2ab & b^2-a^2\end{pmatrix}$

ex $\quad r: (0,1)+\sigma(1,1)$ $\quad S=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad A=(0,1)$



$P'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$

3. Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo ...

(a) prima la traslazione di vettore (x_0, y_0) e poi la traslazione di vettore (x_1, y_1),

(b) prima la simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) e poi la simmetria centrale rispetto al punto (x_1, y_1),

(c) prima la simmetria rispetto ad una retta e poi nuovamente la simmetria rispetto alla stessa retta,

(d) prima la simmetria rispetto ad una retta r e poi la simmetria rispetto ad una retta r' parallela ad r,

(e) prima la simmetria rispetto ad una retta r e poi la simmetria rispetto ad una retta r' incidente con r,

(f) prima la rotazione *antioraria* di un angolo θ rispetto ad un punto (x_0, y_0) e poi la rotazione *oraria* di un angolo θ rispetto ad un punto (x_1, y_1), eventualmente diverso dal precedente,

(g) prima la rotazione antioraria di un angolo θ_0 rispetto ad un punto (x_0, y_0) e poi la rotazione antioraria di un angolo θ_1, eventualmente diverso dal precedente, rispetto ad un punto (x_1, y_1), eventualmente diverso dal precedente.

(a) $P_0 = (x_0, y_0) \quad P_1 = (x_1, y_1)$

$$P' = P + P_0 \qquad P'' = P' + P_1$$

$\rightsquigarrow P'' = P + (P_0 + P_1) \equiv$ TRASLAZIONE DI $(x_0 + x_1, y_0 + y_1)$

(b) $P' = -P + 2P_0 \qquad P'' = -P' + 2P_1$

$\rightsquigarrow P'' = P + (2P_1 - 2P_0) \equiv$ TRASLAZIONE DI $(-2x_0 + 2x_1, -2y_0 + 2y_1)$

ex $P_0 = (1,1) \quad P_1(2,-2) \quad P = (5,3) \quad P' = (-5,-3) + (2,2) = (-2,-1)$

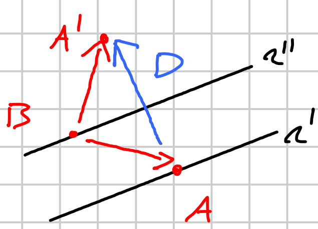
$P'' = (2,1) + (5,-5) = (6,-3) \qquad 2P_1 - 2P_0 = (2,-6)$

(c) $P' = S(P-A) + A \qquad P'' = S(P'-A) + A = S^2(P-A) + A$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P'' = P$$

(d) $P' = S(P-A) + A \qquad P'' = S(P'-B) + B = S[S(P-A) + A - B] + B =$

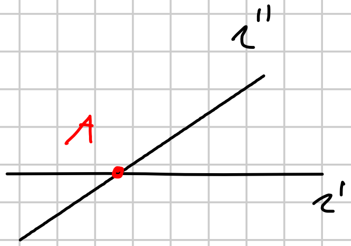
$$= S^2(P-A) + S(A-B) + B = P + S(A-B) - (A-B)$$



$S(A-B) - (A-B) \equiv$ VETTORE $D \perp r', r''$ DIRETTO DA r' VERSO r''

$\rightsquigarrow P'' = P + D \equiv$ TRASL. DI VETTORE D

(e)



$$P' = S'(P-A)+A$$

$$P'' = S''(P'-A)+A = S''S'(P-A)+A$$

$$S'' = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \qquad S' = \begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\alpha = 2\theta''\\ \beta = 2\theta'\end{cases}$$

$$\hat{S} = S''S' = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

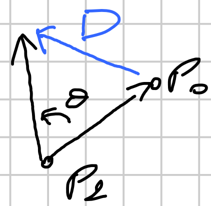
$\rightsquigarrow P'' = \hat{S}(P-A)+A$ ≡ ROTAZIONE ANTIORARIA DI $(\alpha-\beta)$ INTORNO AL PUNTO INTERSEZIONE A

(f) $P_0=(x_0,y_0)$ $\quad P_1=(x_1,y_1)$ $\quad P'=S_0(P-P_0)+P_0$ $\quad P''=S_1(P'-P_1)+P_1$

$$S_0 = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad S_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$P'' = S_1[S_0(P-P_0)+P_0-P_1]+P_1 = S_1S_0(P-P_0)+S_1(P_0-P_1)+P_1$$

$$S_1S_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow P'' = P + S_1(P_0-P_1)-(P_0-P_1)$$



$\rightsquigarrow P'' = P + D$ ≡ TRASL. DI VETTORE D

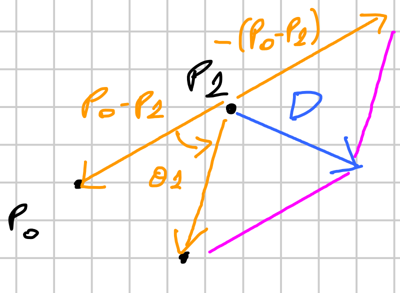
(g) $P_0=(x_0,y_0)$ $\quad P_1=(x_1,y_1)$ $\quad P'=S_0(P-P_0)+P_0$ $\quad P''=S_1(P'-P_1)+P_1$

$$S_0 = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad S_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$$

$$P'' = S_1[S_0(P-P_0)+P_0-P_1]+P_1 = S_1S_0(P-P_0)+S_1(P_0-P_1)+P_1$$

$$\hat{S} = S_1S_0 = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta_1-\sin\theta\sin\theta_1 & -\cos\theta\sin\theta_1-\sin\theta\cos\theta_1\\ \sin\theta\cos\theta_1+\cos\theta\sin\theta_1 & -\sin\theta\sin\theta_1+\cos\theta\cos\theta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta_1) & -\sin(\theta+\theta_1)\\ \sin(\theta+\theta_1) & \cos(\theta+\theta_1)\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow P'' = \hat{S}(P-P_0)+S_1(P_0-P_1)+P_1 = \hat{S}(P-P_0)+P_0 + S_1(P_0-P_1)-(P_0-P_1)$$



≡ ROTAZIONE ANTIORARIA DI "$\theta+\theta_1$" RISPETTO P_0 E TRASLAZIONE DI VETTORE "$D = S_1(P_0-P_1)-(P_0-P_1)$"