Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 08 Gennaio 2014

1. Consideriamo i seguenti 4 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, 0), \qquad D = (0, 1, 1).$$

   (a) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (b) Determinare il volume del tetraedro $ABCD$.

   (c) Determinare l'angolo che la faccia ABC forma con la faccia BCD.

2. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y &= 1 \\ 2x + \lambda z &= 1 \\ y + 4z &= \mu \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori *reali* dei parametri λ e μ il sistema ammette soluzione unica.

   (b) Determinare per quali valori *complessi* dei parametri λ e μ il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \to (x + 1)p'(x) + p(2).$$

   (a) Determinare gli autovalori dell'applicazione ed i relativi autospazi.

   (b) Determinare la forma canonica di Jordan dell'applicazione ed una base nella quale la matrice assume tale forma.

4. Consideriamo la seguente forma quadratica in $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = 16x^2 + 6y^2 + z^2 + 2yz - 2\alpha xy.$$

   (a) Nel caso particolare $\alpha = 9$, determinare (fornendo esplicitamente delle basi costituite da vettori a coordinate intere) un sottospazio W_+ di dimensione 2 su cui la forma è definita positiva, ed un sottospazio W_- di dimensione 1 su cui la forma è definita negativa.

   (b) Determinare, al variare di α, la segnatura della forma quadratica.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.