Applicazioni lineari 6

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto su applicazioni lineari, sottospazi, basi

---

1. Dati due spazi vettoriali V e W, indichiamo con $\mathrm{End}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : V \to W$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{End}(V, W)$ è a sua volta uno spazio vettoriale (detto così non ha molto senso, perché bisognerebbe definire prima le operazioni, ma diciamo che questo fa parte dell'esercizio).
   (b) Se $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$, determinare la dimensione di $\mathrm{End}(V, W)$.
   (c) Fissato un vettore non nullo $v \in V$, dimostrare che l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f \in \mathrm{End}(V, W)$ tali che $f(v) = 0$ è un sottospazio di $\mathrm{End}(V, W)$. Determinare quindi la dimensione di tale sottospazio.
   (d) Fissato un sottospazio vettoriale $V' \subseteq V$, dimostrare che l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f \in \mathrm{End}(V, W)$ tali che $f(v) = 0$ per ogni $v \in V'$ è un sottospazio di $\mathrm{End}(V, W)$. Determinare quindi la dimensione di tale sottospazio, in funzione della dimensione di V'.
2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ed il sottospazio $W = \mathrm{Span}\{(1, 2, 3)\}$.
   (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = V$ e $\mathrm{Im}(f) = W$.
   (b) Descrivere l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente. Si tratta di uno spazio vettoriale?
3. Consideriamo i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^3$ descritti all'esercizio precedente.
   (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) \in W$ per ogni $v \in V$ e $f(w) \in V$ per ogni $w \in W$.
   (b) Dimostrare che l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente è uno spazio vettoriale, quindi determinarne la dimensione.
4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f(f(v)) = 0$ per ogni $v \in V$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$.
   (b) Dimostrare che $\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(V)$.
5. (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(f(f(v))) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, ma $f(f(w)) \neq 0$ per almeno un vettore $w \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Descrivere l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente.

SOLUZIONI REV. 02
BY GIMUSI 07/01/15

1. Dati due spazi vettoriali V e W, indichiamo con $\text{End}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : V \to W$.

   (a) Dimostrare che $\text{End}(V, W)$ è a sua volta uno spazio vettoriale (detto così non ha molto senso, perché bisognerebbe definire prima le operazioni, ma diciamo che questo fa parte dell'esercizio).

   (b) Se $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$, determinare la dimensione di $\text{End}(V, W)$.

   (c) Fissato un vettore non nullo $v \in V$, dimostrare che l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f \in \text{End}(V, W)$ tali che $f(v) = 0$ è un sottospazio di $\text{End}(V, W)$. Determinare quindi la dimensione di tale sottospazio.

   (d) Fissato un sottospazio vettoriale $V' \subseteq V$, dimostrare che l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f \in \text{End}(V, W)$ tali che $f(v) = 0$ per ogni $v \in V'$ è un sottospazio di $\text{End}(V, W)$. Determinare quindi la dimensione di tale sottospazio, in funzione della dimensione di V'.

(a) SIANO $f_1, f_2 \in \text{END}(V,W)$ E DEFINIAMO $\forall v \in V$ $\forall a, b \in \mathbb{K}$ (CAMPO)

SOMMA: $f_1(v) + f_2(v) = \underbrace{w_1 + w_2}_{\equiv \text{ SOMMA IN } W} \in W$ $\quad (w_1 = f_1(v)$ E $w_2 = f_2(v))$

PRODOTTO: $a \cdot f(v) = \underbrace{a \cdot w}_{= \text{ PRODOTTO IN } W} \in W$ $\quad (w = f(v))$

SI DEVE MOSTRARE CHE VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

SOMMA
$$\begin{cases} (S1) & f_1 + f_2 = f_2 + f_1 \quad \Rightarrow \text{BANALE} \equiv w_1 + w_2 = w_2 + w_1 \\ (S2) & f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3 \quad \Rightarrow \text{BANALE} \\ (S3) & \exists f_0 \in \text{END}(V,W) \text{ S.C. } f_0 + f = f \quad \forall f \in \text{END}(V,W) \\ (S4) & \forall f \in \text{END}(V,W) \ \exists \bar{f} \in \text{END}(V,W) \text{ S.C. } f + \bar{f} = f_0 \end{cases}$$

f_0 È L'APPLICAZIONE S.C. $f_0(v) = 0 \quad \forall v \in V$

CHE ESISTE ED È UNICA $(f_0(v_i) = 0, \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE DI $V)$

$\bar{f}$ È L'APPLICAZIONE S.C. $\bar{f}(v) = -f(v) \quad \forall v \in V$

CHE ESISTE UNICA: $\bar{f}(v_i) = -f(v_i) \quad \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE DI V

$\bar{f}(v) = \bar{f}(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \dots = -f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = -f(v)$

PRODOTTO
$$\begin{cases} (P1) & 1 \cdot f = f \\ (P2) & a \cdot (b \cdot f) = (a \cdot b) \cdot f \\ (P3) & (a + b) f = a \cdot f + b \cdot f \\ (P4) & a (f_1 + f_2) = a f_1 + a f_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L'INSIEME $f \in \text{END}(V,W)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$

(b) $\dim(V)=n \quad \dim(W)=m$

SIANO $v_1,\dots,v_n$ UNA BASE DI V E $w_1,\dots,w_m$ UNA BASE DI W

LE $n\times m$ APPLICAZIONI:

$$\begin{cases} f_{11}^*(v_1)=w_1, \; f_{12}^*(v_1)=w_2, \dots, f_{1m}^*(v_1)=w_m \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_{n1}^*(v_n)=w_1, \; f_{n2}^*(v_n)=w_2, \dots, f_{nm}^*(v_n)=w_m \end{cases}$$

SONO UNA BASE DI $\mathrm{END}(V,W)$.

MOSTRIAMO CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_{ij}^*(v_i) = f_0 \iff a_{ij}=0 \quad \forall i=1,n \quad \forall j=1,m$$

E CHE GENERANO

$$\forall f\in \mathrm{End}(V,W): \quad f(v_1)=\sum_{j=1}^{m} a_{1j} w_j = \sum_{j=1}^{m} a_{1j} f_{1j}^*(v_1)$$
$$\vdots$$
$$f(v_n)=\sum_{j=1}^{m} a_{nj} w_j = \sum_{j=1}^{m} a_{nj} f_{nj}^*(v_n)$$

(c) SIA $v\in V$ $v\neq 0$ $\begin{cases} f_1(v)=0, \; f_2(v)=0 \Rightarrow f_1(v)+f_2(v)=0 \\ f(v)=0 \Rightarrow a f(v)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow F_0 : \{ f\in \mathrm{END}(V,W) \text{ t.c. } f(v)=0 \}$ È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathrm{END}(V,W)$

SIA $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \neq 0$ $\{v_1,\dots,v_n\}$ BASE DI V

$\Rightarrow f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = 0 \quad \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow f(v_1)=f_0(v_1)=0, \; f(v_2)=f_0(v_2)=0, \dots, f(v_n)=f_0(v_n)=0$

$\Rightarrow f\equiv f_0$ t.c. $f_0(v_i)=0 \;\; \forall v_i \; \{v_1,\dots,v_n\}$ BASE DI V

$\Rightarrow \mathrm{DIM}(F_0)=0$

(6c) $V' \subseteq V$ $F_0' : \{ f \in End(V,W) \text{ t.c. } f(v)=0 \ \forall v \in V' \}$

SIA $v \in V'$ $\begin{cases} f_1(v)=0 \quad f_2(v)=0 \quad \Rightarrow f_1(v)+f_2(v)=0 \\ f(v)=0 \quad \Rightarrow \quad a f(v)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ F_0' È SOTTOSPAZIO DI $END(V,W)$

SIA $v' = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$ $\quad v_1, \dots, v_k$ BASE DI V' $(k \leq m)$

$\Rightarrow f(v') = a_1 f(v_1) + \dots + a_k f(v_k) = 0 \quad \forall a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow f(v_1) = 0 \ , \ f(v_2)=0 \ , \dots , \ f(v_k)=0$

SIANO $v_{k+1}, \dots, v_m$ $m-k$ VETTORI CHE COMPLETANO $v_1, \dots, v_k$ AD UNA BASE DI V

$\Rightarrow$ CI SONO $m-k$ CONDIZIONI LIBERE PER DETERMINARE UNIVOCAMENTE f: $f(v_{k+1}) = w_{k+1} , \dots , f(v_m) = w_m$

$\Rightarrow \dim F_0' = m-k$

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ed il sottospazio $W = \mathrm{Span}\{(1, 2, 3)\}$.

(a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = V$ e $\mathrm{Im}(f) = W$.

(b) Descrivere l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente. Si tratta di uno spazio vettoriale?

(a) $V: x+y+z=0$ DIM=2 BASE: $\{\overset{v_1}{(1,0,-1)}, \overset{v_2}{(1,-1,0)}\}$

$W = \mathrm{SPAN}\{(1,2,3)\}$ DIM 1 BASE: $\{1,2,3\}$

SIA $v_3 \in V$ t.c. $\{v_1, v_2, v_3\}$ É BASE DI $\mathbb{R}^3$, AD ES. $v_3^* = (1,0,0)$

ALLORA ESISTE UNICA $f^*: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.:

$f^*(v_1) = 0 \qquad f^*(v_2) = 0 \qquad f(v_3^*) = (1,2,3)$

E CHE SODDISFA LE CONDIZIONI POSTE, INFATTI:

$\forall v \in V \quad v = a v_1 + b v_2 \quad f^*(v) = a f^*(v_1) + b f^*(v_2) = 0 \Rightarrow \mathrm{KER}(f^*) = V$

$\forall \hat{v} \notin V \quad \hat{v} = \hat{a} v_1 + \hat{b} v_2 + \hat{c} v_3^* = \hat{a} f^*(v_1) + \hat{b} f^*(v_2) + \hat{c} f^*(v_3^*) = \hat{c}\,(1,2,3) \in W$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f^*) = W$

(b) SODDISFANO LE CONDIZIONI POSTE TUTTE LE f t.c.

$f(v_1) = 0 \qquad f(v_2) = 0 \qquad f(v_3) = \alpha(1,2,3)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$ E $\{v_1, v_2, v_3\}$ BASE DI $\mathbb{R}^3$

L'INSIEME DI TALI APPLICAZIONI $\subseteq \overset{\text{SPAZIO VETTORIALE}}{\mathrm{END}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)}$ INOLTRE

$\forall v \in V \quad f_1(v) + f_2(v) = f_1(a v_1 + b v_2) + f_2(a v_1 + b v_2) = 0$

$\forall \delta \in \mathbb{R} \quad \delta f_1(v) = \delta f_1(a v_1 + b v_2) = \delta \cdot 0 = 0$

$\forall \hat{v} \notin V \quad f_1(\hat{v}) + f_2(\hat{v}) = f_1(\hat{a} v_1 + \hat{b} v_2 + \hat{c} v_3) + f_2(\hat{a} v_1 + \hat{b} v_2 + \hat{c} v_3) =$

$= \hat{c} f_1(v_3) + \hat{c} f_2(v_3) = (\hat{c}\alpha_1 + \hat{c}\alpha_2)(1,2,3) \in W$

$\forall \delta \in \mathbb{R} \quad \delta \cdot f_1(\hat{v}) = \delta \cdot f_1(\hat{a} v_1 + \hat{b} v_2 + \hat{c} v_3) = \delta \hat{c}\,(1,2,3) \in W$

$\Rightarrow$ L'INSIEME DELLE f SEMBREREBBE UNO SPAZIO VETTORIALE (S.S.V. DI END(V,W)) MA NON LO É PERCHÉ NON CONTIENE f_0 ($\alpha \neq 0$)

3. Consideriamo i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^3$ descritti all'esercizio precedente.

(a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) \in W$ per ogni $v \in V$ e $f(w) \in V$ per ogni $w \in W$.

(b) Dimostrare che l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente è uno spazio vettoriale, quindi determinarne la dimensione.

(a) $V: x+y+z=0$ DIM$=2$ BASE: $\{\underbrace{(1,0,-1)}_{v_1}, \underbrace{(1,-1,0)}_{v_2}\}$

$W = \text{SPAN}\{(1,2,3)\}$ DIM 1 BASE: $\{1,2,3\}$

SIA $v_3 \in W$ T.C. $\{v_1, v_2, v_3\}$ È BASE DI $\mathbb{R}^3$, AD ES. $v_3 = (1,2,3)$

(v_1, v_2, v_3 L. INDIP. $\equiv V \cap W = 0$)

ALLORA ESISTE UNICA f^* T.C.

$f^*(v_1) = (1,2,3)$ $f^*(v_2) = (1,2,3)$ $f^*(v_3) = v_1$

E CHE SODDISFA LE CONDIZIONI POSTE, INFATTI:

$\forall v \in V$ $f^*(v) = f^*(a v_1 + b v_2) = a f^*(v_1) + b f^*(v_2) = (a+b)\cdot(1,2,3) \in W$

$\forall w \in W$ $f^*(w) = f^*(c v_3) = c f^*(v_3) = c \cdot v_1 \in V$

(b) SODDISFANO LE CONDIZIONI POSTE TUTTE LE f T.C. ?FORSE NON NEC.

$f(v_1) = (1,2,3)$ $f(v_2) = (1,2,3)$ $f(v_3) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ BASE DI $\mathbb{R}^3$ ($\{v_1, v_2\}$ BASE DI V E $\{v_3\}$ BASE DI W)
QUALUNQUE QUALUNQUE

L'INSIEME DI TALI APPLICAZIONI $\subseteq$ END$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ INOLTRE

$\forall v \in V$ $f_1(v) + f_2(v) = f_1(a v_1 + b v_2) + f_2(a v_1 + b v_2) = 2\cdot(a+b)\cdot(1,2,3) \in W$

$\forall \delta \in \mathbb{R}$ $\delta \cdot f_1(v) = \delta \cdot f_1(a v_1 + b v_2) = \delta(a+b)(1,2,3) \in W$

$\forall w \in W$ $f_1(w) + f_2(w) = f_1(c w_3) + f_2(c w_3) = c(\alpha_1^1 + \alpha_1^2) v_1 + c(\alpha_2^1 + \alpha_2^2) v_2 \in V$

$\forall \delta \in \mathbb{R}$ $\delta \cdot f_1(w) = \delta \cdot f_1(c w_3) = (c \cdot \delta \cdot \alpha_1) v_1 + (c \cdot \delta \cdot \alpha_2) v_2 \in V$

$\Rightarrow$ L'INSIEME DELLE f È UNO SPAZIO VETTORIALE (S.S.V. DI END$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$)

FISSATI V_1, V_2, V_3, LE APPLICAZIONI BASE CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI POSTE SONO LE SEGUENTI:

$$
\begin{cases}
f_1: \; f_1(V_1) = V_3 \quad f_1(V_2) = 0 \quad f_1(V_3) = 0 \\
f_2: \; f_2(V_1) = 0 \quad f_2(V_2) = V_1 \quad f_2(V_3) = 0 \\
f_3: \; f_3(V_1) = 0 \quad f_3(V_2) = 0 \quad f_3(V_3) = V_2 \\
f_5: \; f_5(V_1) = 0 \quad f_5(V_2) = 0 \quad f_5(V_3) = V_2
\end{cases}
$$

INFATTI SONO LIN. INDIPENDENTI E $\forall f$ RISULTA:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_5 f_5 \implies \text{DIM} = 5$$

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f(f(v)) = 0$ per ogni $v \in V$.

(a) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$.

(b) Dimostrare che $\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(V)$.

(a) $f : V \to V$ SIANO $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ BASE DI V

k VETTORI $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ BASE DI $\ker(f)$

ALLORA (VD. TEOREMA LEZ. 18):

$m-k$ VETTORI $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)\}$ BASE DI $\mathrm{Im}(f)$

$f(f(v)) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \{f(v), v \in V\} \subseteq \ker(f)$

(b)

$$f(f(v)) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow \begin{cases} f(v_{k+1}) = a_1^{k+1} v_1 + a_2^{k+1} v_2 + \dots + a_k^{k+1} v_k \\ \vdots \\ f(v_m) = a_1^m v_1 + a_2^m v_2 + \dots + a_k^m v_k \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ BASE DI $\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)}$

k $m-k$ LIN. INDIPENDENTI

$\Rightarrow k = \dim(\ker) \geq m - k \Rightarrow 2k \geq m \Rightarrow k \geq \frac{1}{2} m = \frac{1}{2}\dim(V)$

5. (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(f(f(v))) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, ma $f(f(w)) \neq 0$ per almeno un vettore $w \in \mathbb{R}^3$.

(b) Descrivere l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente.

(a) SIA $\{V_1, V_2, V_3\}$ UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$

ALLORA ESISTE UNICA L'APPLICAZIONE f δ.c

$$\begin{cases} f(V_1) = V_2 \\ f(V_2) = V_3 \\ f(V_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^3 \quad v = a V_1 + b V_2 + b V_3$$

$$\begin{cases} f(v) = a V_2 + b V_3 \quad f(f(v)) = a V_3 \\ f(f(f(v))) = 0 \end{cases}$$

(b) SIA $\{V_1, V_2, V_3\}$ UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$

ALLORA TUTTE LE APPLICAZIONI f δ.c.

$$\begin{cases} f(V_1) = \alpha V_2 + \beta V_3 \\ f(V_2) = \gamma V_3 \\ f(V_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R} \quad v = a V_1 + b V_2 + c V_3$$

$$\begin{cases} f(v) = \alpha b V_2 + \beta c V_3 \\ f(f(v)) = \alpha b \beta V_3 \\ f(f(f(v))) = 0 \end{cases}$$