[B1] Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

risulta diagonalizzabile

- Se a è diverso da 1 e 5 la matrice ha 3 autovalori reali distinti, dunque è diagonalizzabile.
- Se $a = 1$, allora l'autovalore $\lambda = 1$ ha molt. alg. $= 2$ e molt. geom $= 2$, in quanto $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1. Quindi anche in questo caso la matrice data è diagonalizzabile.
- Se $a = 5$, allora l'autovalore $\lambda = 5$ ha molt. alg. $= 2$ e molt. geom $= 1$, in quanto $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2. In questo caso la matrice data non è diagonalizzabile.

Conclusione: $\boxed{\text{diagonalizzabile se e solo se } a \neq 5.}$

— o — o —

[B2] Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione f nella base $\{(1, 2), (1, 3)\}$ (usata in partenza ed arrivo).

Con semplici calcoli

$$f(1,2) = (3,-1) = 10\,(1,2) - 7\,(1,3)$$

$$f(1,3) = (4,-2) = 14\,(1,2) - 10\,(1,3)$$

La matrice richiesta è $\boxed{\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}}$

In alternativa si poteva ottenere mediante cambio di base

$$\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ -7 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

inversa di

[L1] Consideriamo, nel piano cartesiano, la rotazione di 90° in senso orario intorno al punto $(7, 2)$.

(a) Determinare l'immagine della retta $y = x + 1$.

(b) Determinare la controimmagine della retta $2x + 3y = 5$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \underset{\text{sottraggo }(7,2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}x-7\\y-2\end{pmatrix} \underset{\text{ruoto}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-7\\y-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y-2\\-x+7\end{pmatrix} \underset{\text{aggiungo }(7,2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}y+5\\-x+9\end{pmatrix}$$

L'espressione analitica della trasformazione è quindi

$$\boxed{f(x,y) = (y+5, -x+9)}$$

(Verificare qualcosa!)

(a) Retta in forma parametrica: $(0,1) + t(1,1) = (t, 1+t)$

Immagine in forma parametrica: $(t+6, -t+9)$

Immagine in forma cartesiana: $x = t+6 \rightsquigarrow t = x-6$

$\rightsquigarrow y = -x+6+9 = -x+15$

$$\boxed{x + y = 15}$$

(b) $2(y+5) + 3(-x+9) = 5 \rightsquigarrow 2y+10-3x+27 = 5$

$$\boxed{3x - 2y = 32}$$

— o — o —

[L2] Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2axy - 2yz.$$

(a) Studiare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

(b) Nel caso particolare $a = 2$, determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione massima su cui la forma quadratica risulta definita negativa.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Sylvester 1-3-2

- Det $1\times1 = 1$ • Det $2\times2 = 2$
- Det $3\times3 = 6 - 2a^2 - 1 = 5 - 2a^2$

Quindi

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ se } |a| < \sqrt{\tfrac{5}{2}} \text{ si ha } n_+ = 3,\ n_- = n_0 = 0 \\ \bullet \text{ se } |a| = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \text{ si ha } n_+ = 2,\ n_- = 0,\ n_0 = 1 \\ \bullet \text{ se } |a| > \sqrt{\tfrac{5}{2}} \text{ si ha } n_+ = 2,\ n_- = 1,\ n_0 = 0 \end{array}}$$

(b) Siamo nel caso in cui $n_- = 1$, quindi la dimensione max è 1.
Osserviamo che il det 2×2 in alto a sx è negativo, quindi possiamo porre $z = 0$ e ottenere

$$q(x, y, 0) = x^2 + 3y^2 - 4xy = (x-2y)^2 - y^2$$

Ci basta quindi annullare il primo termine per avere che

$$q(2, 1, 0) < 0.$$

Il sottospazio richiesto è quindi $\boxed{\text{Span}((2,1,0))}$

In alternativa si potevano completare i quadrati direttamente senza porre prima $z = 0$.