Istituzioni di Analisi - Soluzioni dei primi due esercizi del secondo appello

1 febbraio 2020

Esercizio 1. Si considerino i funzionali

$$F(u) = u(0) + \int_0^1 \dot{u}^2 + u^2 \, dx, \qquad G(u) = [u(0)]^3 + \int_0^1 \dot{u}^2 + u^2 \, dx.$$

(a) Discutere il problema di minimo per $F(u)$ con le condizioni al bordo $u(1) = 3$.

(b) Discutere il problema di minimo per $G(u)$ con le condizioni al bordo $u(1) = 3$.

Soluzione.
(a) Siano

$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([0,1]) : u(1) = 3\}, \qquad \mathbb{V} := \{v \in C^1([0,1]) : v(1) = 0\}.$$

$\mathbb{X}$ è uno spazio affine e $\mathbb{V}$ è la sua giacitura. Quello che chiede l'esercizio è studiare il problema di minimo

$$\min\{F(u) : u \in \mathbb{X}\}.$$

Per $u \in \mathbb{X}$ e $v \in \mathbb{V}$ sia

$$\phi(t) := F(u + tv) = u(0) + tv(0) + \int_0^1 \dot{u}^2 + u^2 + 2t(\dot{u}\dot{v} + uv) + t^2(\dot{v}^2 + v^2) \, dx.$$

Deriviamo rispetto a t

$$\phi'(t) = v(0) + \int_0^1 2(\dot{u}\dot{v} + uv) + 2t(\dot{v}^2 + v^2) \, dx.$$

Se u è punto di minimo allora

$$0 = \phi'(0) = v(0) + 2\int_0^1 \dot{u}\dot{v} + uv \, dx = v(0) + 2[\dot{u}v]_0^1 + 2\int_0^1 v(u - \ddot{u}) \, dx = v(0)(1 - 2\dot{u}(0)) + 2\int_0^1 v(u - \ddot{u}) \, dx.$$

Nei passaggi precedenti abbiamo prima integrato per parti e poi utilizzato la condizione $v(1) = 0$. Grazie a FLCV otteniamo che u risolve $u - \ddot{u} = 0$. Scegliendo $v \in \mathbb{V}$ tale che $v(0) \neq 0$, si ottiene la condizione $1 - 2\dot{u}(0) = 0$. Riassumendo se u è punto di minimo, allora u risolve

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \qquad \text{(ELE)} \\ 1 - 2\dot{u}(0) = 0 \qquad \text{(NBC)} \\ u(1) = 3 \qquad \text{(DBC)} \end{cases}$$

La soluzione di (ELE) è della forma $u(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Questi due parametri si determinano risolvendo il sistema lineare 2x2 che si ottiene imponendo (DBC) e (NBC). Si verifica che quel sistema ha soluzione unica, che indichiamo con (α_0, β_0). Sia infine $u_0(x) := \alpha_0 e^x + \beta_0 e^{-x}$. Dimostriamo adesso formalmente che u_0 è l'unico punto di minimo. Infatti, presa $v \in \mathbb{V}$

$$F(u_0 + v) = F(u_0) + \underbrace{v(0) + 2\int_0^1 \dot{u}_0 \dot{v} + u_0 v \; dx}_{=0} + \int_0^1 \dot{v}^2 + v^2 \; dx \geq F(u_0),$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\dot{v}(x) = 0 = v(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$. Il ter

(b) Il minimo non esiste e l'inf vale $-\infty$. Una successione che tende all'estremo inferiore è data da $u_n(x) := (n + 3)x - n$. Infatti $u_n(1) = 3$ per ogni n, e

$$G(u_n) = -n^3 + \int_0^1 (n + 3)^2 + ((n + 3)x - n)^2 \; dx = -n^3 + O(n^2).$$

Per cui

$$\lim_{n \to +\infty} G(u_n) = -\infty.$$

Esercizio 2. Sia a un numero reale positivo, e si consideri il problema

$$\ddot{u} = \log u, \qquad u(0) = u(2020) = a.$$

(a) Discutere esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni.

(b) Determinare i valori di a per cui le soluzioni sono minori di 1 per ogni $x \in [0, 2020]$.

Soluzione.

(a) Faccio uso del metodo diretto per risolvere l'esercizio. Per prima cosa che per avere senso l'equazione differenziale deve valere che $u(x) > 0$. Di qui in avanti supponiamo che questa ipotesi sia vera (? è corretto fare questa ipotesi?).

Per $x \in [0, 2020]$, $p \in \mathbb{R}$ e $s > 0$ siano

$$L(x, s, p) := \frac{p^2}{2} + g(s), \qquad g(s) := \int_0^s \log t \; dt,$$

$$F(u) := \int_0^{2020} L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx.$$

Osservo che $g(0) = 0$, g è continua, $g'(s) = \log(s)$ e $g''(s) > 0$ per ogni s. Inoltre g è decrescente in $[0, 1]$, crescente in $[1, +\infty)$, limitata dal basso e convessa.

<u>1. Formulazione debole.</u> Sia $\mathbb{X} := \{u \in H^{1,2}((0, 2020)) : u(0) = u(2020) = a\}$. Studio il problema di minimo

$$\min\{F(u) : u \in \mathbb{X}\}.$$

Osservo che $F(u) < +\infty$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ e che le condizioni puntuali al bordo sono ben poste.

<u>2. Compattezza.</u> Definisco la seguente nozione di convergenza in $\mathbb{X}$ di u_n a u_∞:

- $u_n \longrightarrow u_\infty$ uniformemente su $[0, 2020]$.
- $\dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_\infty$ debole L^2.

Mostriamo l'esistenza di un sottolivello di F compatto. Sia $\{u_n\}_n \subseteq \mathbb{X}$ e $M > 0$ tale che

$$M \geq F(u_n) = \int_0^{2020} \frac{1}{2}\dot{u_n}^2 + g(u_n)dx.$$

Adesso osserviamo che $\exists M' > 0 : \|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M'$ per ogni n (si fa vedere usando la disuguaglianza $L(x,s,p) \geq \frac{p^2}{2} - A$, che è vera perché g è limitata dal basso). Dunque, per compattezza debole delle palle $\exists$ sottosuccessione n_k tale che $\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup v$ debole L^2. Ora faccio uso del teorema di Ascoli-Arzelà sulla successione $\{u_{n_k}\}$:

- Equicontinuità: segue dalla equi-$\frac{1}{2}$-Holderianeità e dall'osservazione precedente:

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \|\dot{u}_n\|_{L^2} |x-y|^{\frac{1}{2}} \leq M'|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

- Limitazione ad x fisso:

$$|u_n(x)| \leq |u_n(0)| + |u_n(x) - u_n(0)| \leq a + M'\sqrt{2020}.$$

Per AA esiste dunque una sottosuccessione $n_{k_i} : u_{n_{k_i}} \to u_\infty$ uniformemente. Con la tecnica del "doppio scambio" si mostra che $\dot{u}_\infty = v$. Inoltre u_∞ rispetta le condizioni al bordo $u_\infty(0) = u_\infty(2020) = a$ grazie alla convergenza uniforme. Dunque ho mostrato l'esistenza di un sottolivello compatto.

<u>3. SCI.</u> Sia $\{u_n\}_n \subseteq \mathbb{X}$ successione tale che $u_n \xrightarrow{\mathbb{X}} u_\infty$. Dobbiamo mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty).$$

Questo segue da due fatti:

- $$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^{2020} \frac{1}{2}\dot{u}_n^2 \, dx \geq \int_0^{2020} \frac{1}{2}\dot{u}_\infty^2 \, dx,$$

  per la SCI debole della norma L^2.

- $$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^{2020} g(u_n) \, dx \geq \int_0^{2020} g(u_\infty) \, dx,$$

  per la convessità di g e la convergenza debole di u_n a u_∞.

Grazie al teorema di Waiestrass, sappiamo che esiste $u_0 \in \mathbb{X}$ punto di minimo per F. Mostriamo che u_0 è più regolare.

<u>4. Regolarità.</u> Per $v \in C_C^\infty([0,2020])$, sia

$$\phi(t) := F(u_0 + tv) = \int_0^{2020} \frac{(\dot{u}_0 + t\dot{v})^2}{2} + g(u_0 + tv)dx.$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale

$$\phi'(t) = \int_0^{2020} (\dot{u}_0 + t\dot{v})\dot{v} + \log(u_0 + tv)v \, dx.$$

Visto che u_0 è punto di minimo, deve valere che

$$0 = \phi'(0) = \int_0^{2020} \dot{u}_0 \dot{v} + \log(u_0) v \; dx, \tag{1}$$

o, equivalentemente

$$\int_0^{2020} \dot{u}_0 \dot{v} \; dx = - \int_0^{2020} v \log(u_0) \; dx.$$

Dunque

$$(\dot{u}_0)' = \log(u_0).$$

Ma allora

$$u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow RHS \in C^0 \Rightarrow \dot{u}_0 \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^2 \Rightarrow Bootstrap \Rightarrow u_0 \in C^\infty.$$

5. Unicità u_0 è l'unica soluzione dell'equazione differenziale. Infatti la lagrangiana L è strettamente convessa nella coppia (s, p) (perché l'Hessiano è definito positivo per ogni (s, p). Dunque si conclude in due passi:

1. Se u risolve l'equazione differenziale, allora u è punto di minimo per il problema di minimo (si deve usare la convessità di L).
2. Esiste un unico punto di minimo per il problema variazionale (si deve usare la stretta convessità di L).

Per dimostrare entrambi i punti precedenti si deve usare che

$$L(x, s_0 + s_1, p_0 + p_1) \geq L(x, s_0, p_0) + s_1 L_s(x, s_0, p_0) + p_1 L_p(x, s_0, p_0),$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $(s_0, p_0) = (0, 0)$.

(b) (!Questo tentativo di soluzione potrebbe essere sbagliato!). Dico che se $a < 1$ allora $u(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0, 2020]$. Una possibile soluzione è quella di usare un argomento di troncamento, cioè troncare a 1 la soluzione u_0 quando $u > 1$ e verificare che il funzionale vale di meno.

Però l'esercizio chiedeva in valori di a per cui $u(x) < 1$ ...