Istituzioni di Analisi - Prova di Soluzioni

18 gennaio 2020

Esercizio 1. *Determinare per quali valori del parametro a il problema*

$$\min\{F(u) := \int_{-\pi}^{\pi} \{(\dot{u} - \cos x)^2 + (u - \sin x)^2\} dx : u \in C^1([-\pi, \pi]), u(0) = a\}$$

ammette una soluzione.

Soluzione. Per prima cosa introduciamo lo spazio vettoriale

$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([-\pi, \pi]) : u(0) = a\},$$

ed indichiamo con $\mathbb{V}$ la sua giacitura, cioè

$$\mathbb{V} := \{v \in C^1([-\pi, \pi]) : v(0) = 0\}.$$

Quello che ci prefiggiamo di studiare è il problema di minimo

$$\min\{F(u) : u \in \mathbb{X}\}. \tag{P}$$

Per $u \in \mathbb{X}$ e $v \in \mathbb{V}$ sia

$$\begin{aligned}\phi(t) := F(u + tv) &= \int_{\pi}^{\pi} (\dot{u} + t\dot{v} - \cos x)^2 + (u + tv - \sin x)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \dot{u}^2 + t^2\dot{v}^2 + \cos^2 x + 2t\dot{u}\dot{v} - 2\dot{u}\cos x - 2t\dot{v}\cos x + u^2 + t^2v^2 + \sin^2 x + 2tuv - 2tv\sin x - 2u\sin x dx\end{aligned}$$

Derivando ϕ otteniamo che

$$\phi'(t) = \int_{\pi}^{\pi} 2t\dot{v}^2 + 2\dot{u}\dot{v} - 2\dot{v}\cos x + 2tv^2 + 2uv - 2v\sin x\ dx.$$

Se u è punto di minimo per F, allora

$$0 = \phi'(0) = \int 2\dot{v}(\dot{u} - \cos x) + 2v(u - \sin x)\ dx = 2[v(\dot{u} - \cos x)] + 2\int v(u - 2\sin x - \ddot{u})\ dx, \tag{1}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato un'integrazione per parti.
Adesso teniamo conto del fatto che la condizione $u(0) = a$ è data al centro dell'intervallo, per cui dividiamo l'intervallo $[\pi, \pi]$ nei due intervalli: $I_1 := [-\pi, 0]$ e $I_2 := [0, \pi]$. Per cui consideriamo i due problemi di minimo (P1) e (P2)

$$\min\{F_1(u) := \int_{I_1} (\dot{u} - \cos x)^2 + (u - \sin x)^2 dx : u \in \mathbb{X}_1 := \{u \in C^1(I_1), u(0) = a\}\}, \tag{P1}$$

$$\min\{F_2(u) := \int_{I_2} (\dot{u} - \cos x)^2 + (u - \sin x)^2 dx : u \in \mathbb{X}_2 := \{u \in C^1(I_2), u(0) = a\}\}. \qquad \text{(P2)}$$

Ora, ripercorrendo i passaggi che hanno portato a (1), giungiamo, per $i = 1, 2$ a

$$0 = 2[v(\dot{u} - \cos x)]_{I_i} + 2\int_{I_i} v(u - 2\sin x - \ddot{u})\ dx.$$

Facendo uso di FLCV e facendo variare opportunamente $v \in \mathit{Giacitura}(\mathbb{X}_i)$ (prima prendiamo $v \in C_C^\infty$ e otteniamo ELE, poi prendiamo v che non si annulla nell'estremo diverso da 0 e otteniamo NBC), otteniamo i due sistemi differenziali

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - 2\sin x \quad \text{ELE} \\ u(0) = a \quad \text{DBC} \\ \dot{u}(-\pi) = -1 \quad \text{NBC} \end{cases} \qquad \text{(S1)}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - 2\sin x \quad \text{ELE} \\ u(0) = a \quad \text{DBC} \\ \dot{u}(\pi) = -1 \quad \text{NBC} \end{cases} \qquad \text{(S2)}$$

I due sistemi precedenti hanno soluzione unica data da (modulo errori di calcolo):

$$\begin{cases} u_{0,1}(x) = \alpha_{0,1} \exp x + \beta_{0,1} \exp x - \sin x \\ \alpha_{0,1} = a\frac{e^{2\pi}}{1+e^{2\pi}} \\ \beta_{0,1} = \frac{a}{1+e^{2\pi}} \end{cases} \qquad \text{(Sol1)}$$

$$\begin{cases} u_{0,2}(x) = \alpha_{0,2} \exp x + \beta_{0,2} \exp x - \sin x \\ \alpha_{0,2} = \frac{a}{1+e^{2\pi}} \\ \beta_{0,2} = a\frac{e^{2\pi}}{1+e^{2\pi}} \end{cases} \qquad \text{(Sol2)}$$

Le due soluzioni $u_{0,1}$ e $u_{0,2}$ sono di classe C^∞ nei rispettivi intervalli di definizione. Inoltre, per come le abbiamo ottenute, sono le candidate soluzioni dei problemi di minimo (P1) e (P2). Dimostriamo rigorosamente che lo sono: per $i = 1, 2$ e $v \in \mathit{Giacitura}(\mathbb{X}_i)$ vale che

$$F_i(u_{0,i} + v) = F_i(u_{0,i}) + \underbrace{\delta F_i(u_{0,i}, v)}_{=0} + \int_{I_i} \dot{v}^2 + v^2\ dx = F_i(u_{0,i}) + \int_{I_i} \dot{v}^2 + v^2\ dx \geq F_i(u_{0,i}),$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $v(x) = 0$ per ogni $x \in I_i$. Nel passaggio precedente abbiamo usato che $\delta F_i(u_{0,i}, v) = 0$, che è vero perché $u_{0,i}$ risolve ELE.

Infine, indichiamo con u_0 l'incollamento di $u_{0,1}$ e $u_{0,2}$. Imponendo la condizione

$$u_{0,1}(0) = u_{0,2}(0),$$

otteniamo che u_0 si incolla C^1 se e solo se $a = 0$. A questo punto possiamo conludere l'esercizio.

1. Se $a = 0$, allora u_0 è l'unica soluzione di (P). Infatti, per $v \in \mathbb{V}$,

$$F(u_0 + v) = F(u_0) + \delta F(u_0, v) + \int_{-\pi}^{\pi} \dot{v}^2 + v^2\ dx = F(u_0) + \int_{-\pi}^{\pi} \dot{v}^2 + v^2\ dx \geq F(u_0),$$

   e vale l'uguaglianza se e solo se $v(x) = 0$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Nel passaggio precedente $\delta F(u_0, v) = 0$ perché u_0 risolve ELE.

2. Se $a \neq 0$, allora il problema (P) non ha soluzione. Infatti i conti precedenti mostrano che u_0 è l'unica soluzione del problema in $H^1((-\pi, \pi))$ (u_0 è ottenuta incollando $u_{0,1}$ e $u_{0,2}$, che sono le soluzioni dei problemi (P1) e (P2)). Quindi, se per assurdo esistesse una soluzione u in $C^1([-\pi, \pi])$, allora u dovrebbe risolvere il problema di minimo pure in H^1. Dunque $u = u_0$, assurdo.

Esercizio 2. *Discutere esistenza, unicità e regolarità di funzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodiche e tali che*

$$\ddot{u} = u^3 + \sin^2(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{EQ}$$

Soluzione. Cerchiamo di dimostrare l'esistenza e unicità di una funzione $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R})$ periodica che risolva (EQ). Poniamo

$$L(x, s, p) := \frac{p^2}{2} + \frac{s^4}{4} + s\sin^2 x, \qquad F(u) := \int_0^\pi L(x, u(x), \dot{u}(x))dx.$$

<u>1. Formulazione debole.</u> Sia $\mathbb{X} := \{u \in H^{1,2}((0,\pi)) : u(0) = u(\pi)\}$. Studio il problema di minimo

$$\min\{F(u) : u \in \mathbb{X}\}.$$

Osservo che $F(u) < +\infty$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ e che le condizioni puntuali al bordo sono ben poste.
<u>2. Compattezza.</u> Definisco la seguente nozione di convergenza in $\mathbb{X}$ di u_n a u_∞:

- $u_n \longrightarrow u_\infty$ uniformemente su $[0, \pi]$.
- $\dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_\infty$ debole L^2.

Mostriamo l'esistenza di un sottolivello di F compatto. Sia $\{u_n\}_n \subseteq \mathbb{X}$ e $M > 0$ tale che

$$M \geq F(u_n) = \int_0^\pi = \frac{1}{2}\dot{u_n}^2 + \frac{1}{4}u_n^4 + u_n \sin^2 x \; dx.$$

Adesso facciamo due osservazioni:

1. $\exists M' > 0 : \|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M'$ per ogni n (si fa vedere usando la disuguaglianza $L(x, s, p) \geq \frac{p^2}{2} - A$).
2. $\exists M'' > 0 : |u_n(x_n)| \leq M''$ per ogni n, dove $x_n \in [0, \pi]$. Infatti

   $$L(x, s, p) \geq \frac{p^2}{2} + \frac{s^4}{4} - |s| \geq \frac{s^4}{8} - B.$$

   Per cui deduciamo che

   $$\int_0^\pi |u_n|^4 dx \leq M''' \Rightarrow \int_0^\pi |u_n| dx \leq C \Rightarrow |u_n(x_n)| \leq M'',$$

   dove nell'ultimo passaggio si fa uso del teorema della media integrale.

Per compattezza debole delle palle $\exists$ sottosuccessione n_k tale che $\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup v$ debole L^2. Ora faccio uso del teorema di Ascoli-Arzelà sulla successione $\{u_{n_k}\}$:

- Equicontinuità: segue dalla equi-$\frac{1}{2}$-Holderinità e dalla prima osservazione precedente:

  $$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \|\dot{u}_n\|_{L^2} |x - y|^{\frac{1}{2}} \leq M'|x - y|^{\frac{1}{2}}.$$

- Limitazione ad x fisso:

  $$|u_n(x)| \leq |u_n(x_n)| + |u_n(x) - u_n(x_n)| \leq M'' + M'\sqrt{\pi}.$$

Per AA esiste dunque una sottosuccessione n_{k_i} : $u_{n_{k_i}} \to u_\infty$ uniformemente. Con la tecnica del "doppio scambio" si mostra che $\dot{u}_\infty = v$. Inoltre u_∞ rispetta le condizioni al bordo $u_\infty(0) = u_\infty(\pi)$ grazie alla convergenza uniforme. Dunque ho mostrato l'esistenza di un sottolivello compatto.
3. SCI. Standard grazie alla SCI debole della norma e alla convergenza uniforme.

Grazie al teorema di Waiestrass, sappiamo che esiste $u_0 \in \mathbb{X}$ punto di minimo per F. Mostriamo che u_0 è più regolare.
4. Regolarità. Per $v \in C_C^\infty([0, \pi])$, sia

$$\phi(t) := F(u_0 + tv) = \int_0^\pi \frac{(\dot{u}_0 + t\dot{v})^2}{2} + \frac{(u_0 + tv)^4}{4} + (u_0 + tv)\sin^2 x dx.$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale

$$\phi'(t) = \int_0^\pi (\dot{u}_0 + t\dot{v})\dot{v} + (u_0 + tv)^3 v + v \sin^2 x dx.$$

Visto che u_0 è punto di minimo, deve valere che

$$0 = \phi'(0) = \int_0^\pi \dot{u}_0\dot{v} + u_0^3 v + v\sin^2 x \; dx, \tag{2}$$

o, equivalentemente

$$\int_0^\pi \dot{u}_0\dot{v} \; dx = -\int_0^\pi v(u_0^3 + \sin^2 x \; dx.$$

Dunque

$$(\dot{u}_0)' = u_0^3 + \sin^2 x.$$

Ma allora

$$u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow RHS \in C^0 \Rightarrow \dot{u}_0 \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^2 \Rightarrow \textit{Bootstrap} \Rightarrow u_0 \in C^\infty.$$

Tornando all'equazione (2), usando $v \in C_C^\infty([0, \pi])$, ed integrando per parti si ottiene

$$0 = [\dot{u}_0 v]_0^\pi + \int_0^\pi v(u_0^3 + \sin^2 x - \ddot{u}_0) \; dx.$$

Grazie a FLCV ed ad una scelta opportuna di v, si ottiene che u_0 risolve

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 = u_0^3 + \sin^2 x \\ u_0(0) = u_0(\pi) \\ \dot{u}_0(0) = \dot{u}_0(\pi). \end{cases}$$

Dalle condizioni precedenti si ottiene pure che $\ddot{u}_0(0) = \ddot{u}_0(\pi)$. Estendiamo per periodicità u_0 a $\tilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per quanto detto in precedenza $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R})$. Infine osserviamo che $\tilde{u}$ soddisfa (EQ) su tutto $\mathbb{R}$ (a priori sappiamo solo che $\tilde{u}$ è soluzione solo in $[0, \pi]$). Infatti, preso $\mathbb{R} \ni x' = x + k\pi$, con $x \in [0, \pi]$ e $k \in \mathbb{Z}$,

$$\ddot{\tilde{u}}(x') = \ddot{\tilde{u}}(x + k\pi) = \ddot{\tilde{u}}(x) = \tilde{u}^3(x) + \sin^2 x = \tilde{u}^3(x + k\pi) + \sin^2(x + k\pi) = \tilde{u}^3(x') + \sin^2 x'.$$

In conclusione abbiamo mostrato l'esistenza della soluzione $\tilde{u}$ cercata.
5. Unicità(Simile ad Esempio 2, Lezione 24.) Mostriamo ora che $\tilde{u}$ è unica. Suddividiamo la dimostrazione in più passi.

Passo 1. (EQ) ha soluzione unica in $[0, \pi]$, data da u_0. Per mostrare ciò si fa vedere che:

- Se u risolve (EQ), allora u è punto di minimo per il problema variazionale in $[0, \pi]$.
- Il problema variazionale ha punto di minimo unico.

Entrambi i punti precedenti seguono dalla stretta convessità della Lagrangiana L.

Passo 2. Non esistono soluzioni di (EQ) con periodo $T \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}^+$. Se infatti per assurdo esistesse una soluzione u con periodo T, allora

$$\sin^2 x = \ddot{u} - u^3,$$

avrebbe periodot T, contraddizione.

Passo 3. Mostriamo adesso che non esistono soluzioni di periodo $k\pi$. Considero una soluzione u di periodo $k\pi$.

Passo 4. Mostro che se u risolve (EQ), allora u è punto di minimo per il problema variazionale in $[0, k\pi]$ (convessità di L).

Passo 5. Dimostro che il problema variazionale in $[0, k\pi]$ ha punto di minimo unico (stretta convessità di L).

Conclusione. Conosciamo già una soluzione di periodo $k\pi$ di (EQ), cioè u_0 ripetuta k volte. Dunque ho l'unicità.