ESERCIZI MAX/MIN SU INSIEMI ILLIMITATI

• $x^2+y^2 = f(x,y)$ inf. / sup su $\mathbb{R}^2$

- GUARDO COSA FA A $+\infty$

$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f = +\infty$ poiché uso le coordinate polari e ho

$\rho^2 \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} +\infty$

$\Rightarrow \sup = +\infty$ perché $f(x,0) = x^2 \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$

$\nexists$ massimi

$\Rightarrow$ ho $\min_{\mathbb{R}^2} f$
W.G.

Il minimo è un punto stazionario?

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

$\hookrightarrow f = 0 \leftarrow$ minimo, 1 solo

• $f(x,y) = x^2 - y^2$ sup/inf f su $\mathbb{R}^2$

$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} x^2 - y^2 = \nexists$ $\quad f(x,0) = +\infty$, $f(0,x) = -\infty$ $\Rightarrow$ $\sup = +\infty$, $\inf = -\infty$

• $f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$ inf / sup su $\mathbb{R}^2$

$\sup f = +\infty \to f(x,0) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$

$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f = +\infty$ perché in coordinate polari ho:

$\rho^4 \underbrace{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}_{\geq c > 0} - \rho^2 \overbrace{\sin\theta\cos\theta}^{\leq 1} \geq c\rho^4 - \rho^2 \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \infty$

$\geq c > 0$ perché è una funzione continua strett. > 0 su un compatto

$\Rightarrow$ W.G. $\exists \min_{\mathbb{R}^2} f$ (che è un punto stazionario)

$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} y = 4x^3 \\ 4^4 x^9 - x = 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow x = 0,\ y = 0$ oppure $4^4 x^8 = 1$ $\quad x = +\frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$

$f(0,0) = 0$

$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$ minimo con 2 punti di minimo

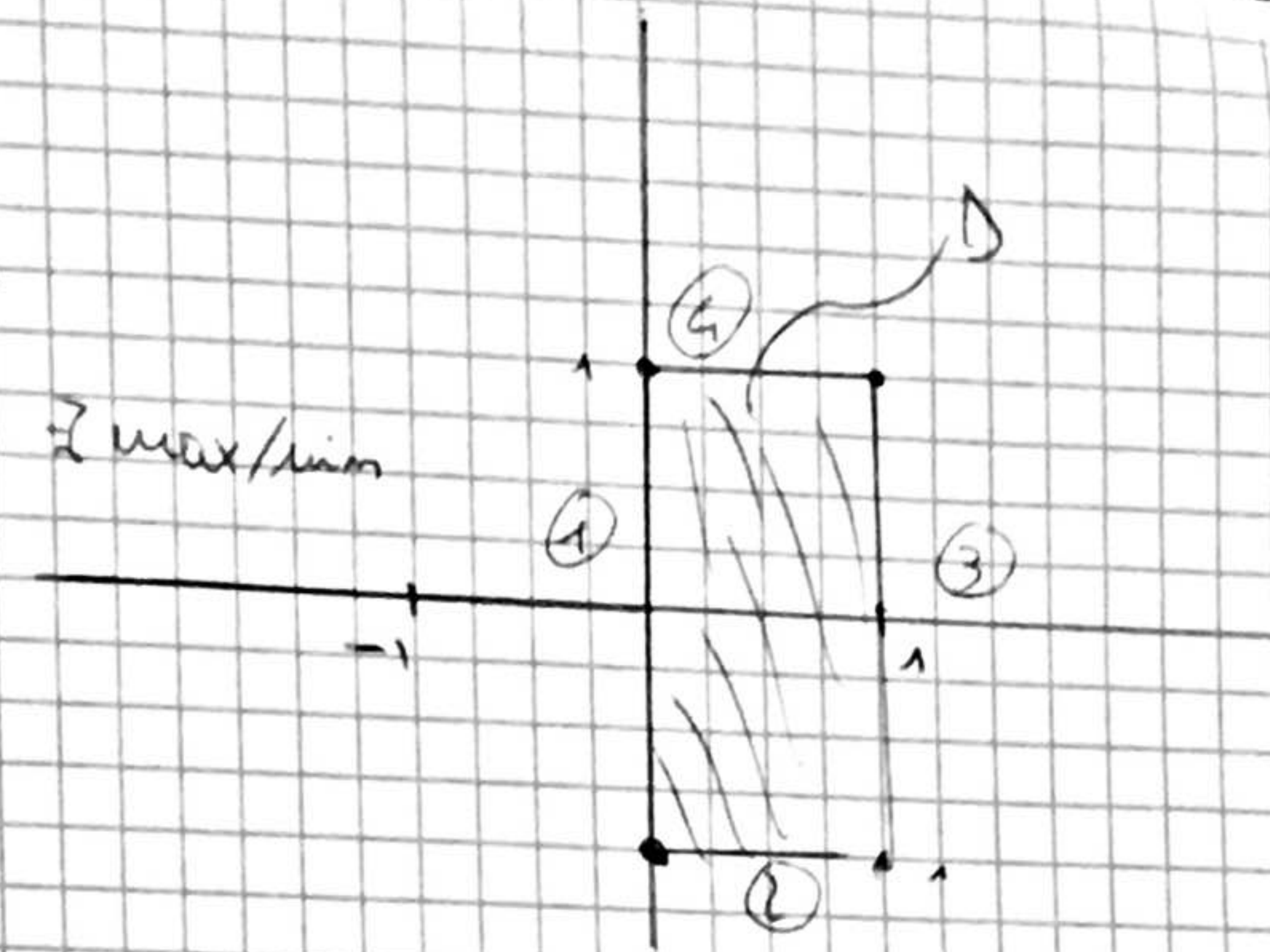
ESERCIZI PAG 68 -

$f(x,y) = |x - e^{y}|$

$D = \{ x \in [0,1], \ y \in [-1,1] \}$

	-1	1
0	(0,-1)	(0,1)
1	(1,-1)	(1,1)

D è limitato $\Rightarrow \exists$ max/min (W)

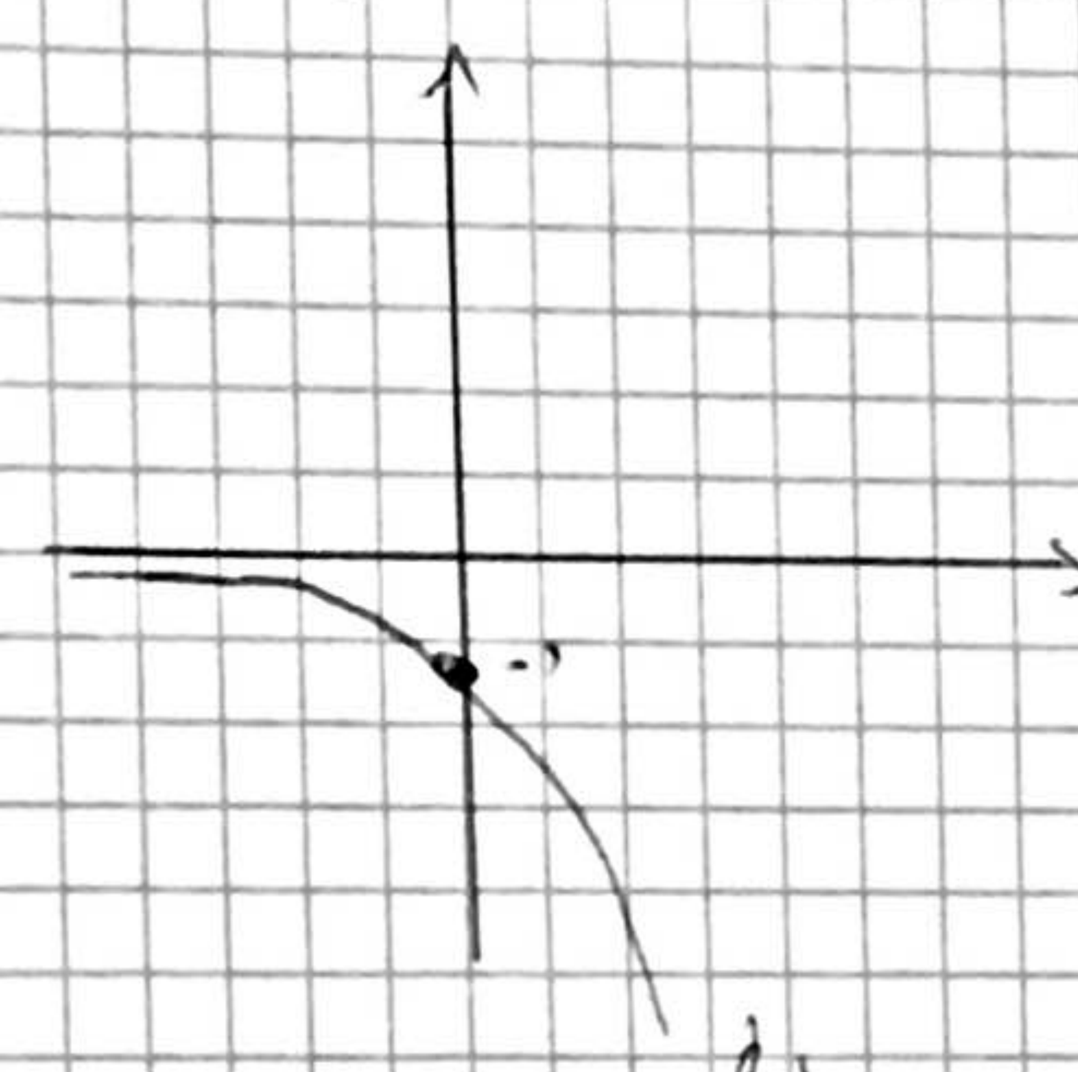


Studio $g(x,y) = x - e^{y}$

PUNTI STAZIONARI INTERNI

$\nabla g = (1, -e^{y}) = (0,0)$ non ci sono punti stz.

- BORDO $\rightarrow$ lo parametrizzo fatto da 4 curve



$\gamma_1 = (0,t) \quad -1 < t < 1 \rightarrow g_1 = -e^{t}$

ha max $(0,0)$ $g = -1$ min $(0,1)$

$\gamma_2 = (t,-1) \quad 0 < t < 1 \rightarrow$ max in $(1,-1)$

$g_2(t,-1) = t - \frac{1}{e}$ min $(0,-1)$

$\gamma_3 = (1,t) \quad -1 < t < 1 \rightarrow g_3 = 1 - e^{t}$

max $(1,-1)$ min $(1,1)$

$\gamma_4 = (t,1) \quad 0 < t < 1 \quad g_4 = t - e$

max $(1,1)$ min $(1,0)$

CANDIDATI MAX / MIN DI G

$(0,0)$ $(1,-1)$ $(1,-1)$ $(1,1)$

$\boxed{(0,1)}$ $(0,-1)$ $(1,1)$ $(1,0)$

Max

Su $f(x,y)$ il max è $(0,1) \rightarrow f(0,1) = e$ 1pt.

il min è $(1,0) \rightarrow f(1,0) = 0$ ∞ pt.

Questo non lo hai dimostrato da nessuna parte, va fatto

ESERCIZI PAG 65

- $f(x,y) = x^2 + \arctan(xy)$ max/min su $\mathbb{R}^2$

$f(x,0) = x^2 \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$

$f\left(-\frac{1}{x}, x^2\right) = \frac{1}{x^2} + \arctan(-x) \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$

$\sup = +\infty$

$\inf = -\pi/2$

tu hai dimostrato solo che inf è <= di questo, devi fare una stima dal basso

- $f(x,y) = x^4 + y^2$ → uso il pareggiamento degli esponenti che

mi da $x^4 = v^2 \to$ $v^2 + y^2 \to +\infty$ $v^2 + y^2 \to \infty$

$\sup = +\infty$

MINIMO → PT. STAZ.

Attenzione: quando cambi variabili rischi di cambiare i punti di minimo, quindi o fai il gradiente della funzione originale o poi fai il cambio inverso di variabili sui punti trovati

$\nabla f = (0,0)$

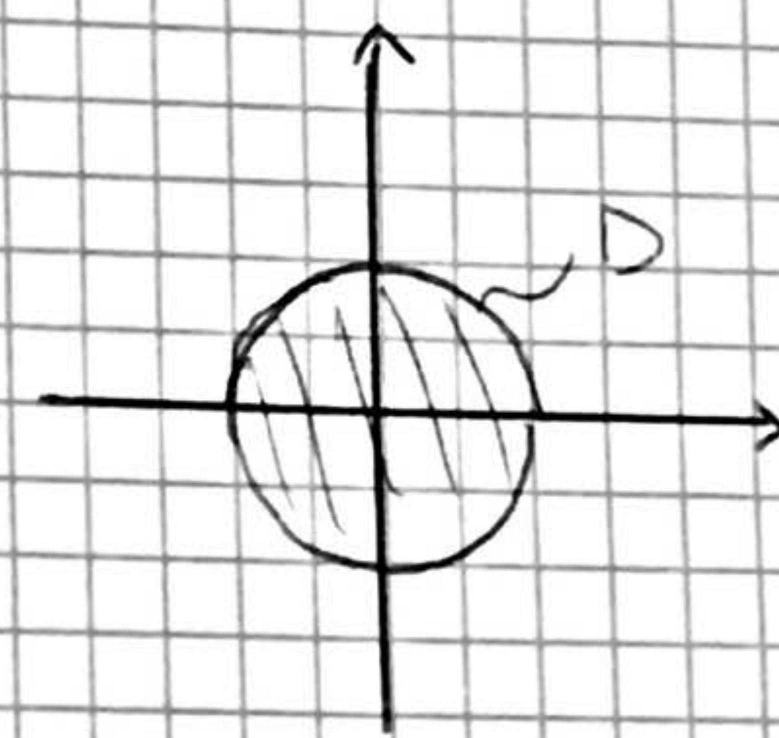
$\begin{cases} 2v = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \to (0,0)$ è minimo

ESERCIZI PAG 68 GHISI - GOBBINO

$f(x,y) = |y - x^2|$ $\qquad D = \{ x^2 + y^2 \leq 4 \} \rightarrow$ è una circonferenza

$\Downarrow W$

$\exists$ max/min



Studio $f(x) = y - x^2$

• PUNTI STAZ. INTERNI

$\nabla g(x) = (0,0) \rightarrow (1, -2x) \neq 0,0$ Non ce ne sono

• BORDO $\rightarrow$ MOLTIPLICATORI

• PUNTI SINGOLARI $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ +2y = 0 \\ (x,y) \in D \end{cases}$ $(0,0) \leftarrow$ è il minimo di f

i punti singolari sono solo sul bordo e (0,0) non è sul bordo

PUNTI DI TAGLIO $\Rightarrow$ non ne abbiamo

MOLTIPLICATORI

$\begin{cases} 1 = 2\lambda y \\ -2x = 2\lambda x \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow$ $\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \\ x \neq 0 \Rightarrow 2\lambda = -2 \rightarrow -2y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x^2 + \frac{1}{4} - 4 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{15}}{2} \end{array}$

PUNTI CANDIDATI DI g $\qquad g(0,0) = 0$

$(0, \pm 2) \Rightarrow g(0,-2) = -2 \qquad g(0,2) = 2$

$\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow g\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{17}{4} \leftarrow$ minimo di f

PUNTO DI MAX DI f: $\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow f = \frac{17}{4}$ 2 pti di max

PUNTI DI MIN DI f: $f(0,0) = 0 \rightarrow (0,0)$ è minimo

∞ pti di minimo

Quanti punti di minimo?

devi porre a sistema con x^2 + y^2 <= 4 alrimenti trovi solo due punti!

$\begin{cases} y - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = y \\ x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ i punti di minimo sono infiniti

$\Delta = 1 + 16 = 17$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

- x^2+y^2+3xy sup/inf su $\mathbb{R}^2$

Noto che $f(x,x) = 5x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty \Rightarrow$ sup $= +\infty$, inf $= -\infty$

$f(-x,x) = -x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

C'è un pto stazionario

$$\begin{cases} 2x+3y=0 & \to y=-2/3\,x \\ 2y+3x=0 & \to \frac{5}{3}x=0 \end{cases} \quad x=y=0$$

- x^2+y^2+2xy

$f(x,x) = 4x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ sup $= +\infty$

$f(x,-x) = 0$ inf $= 0$ Perchè? Ti serve che la funzione sia sempre > = 0

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2y+2y=0 \end{cases} \quad x=y=0 \quad (0,0) \text{ ∞ p.t. minimo}$$

- $\lim\limits_{x^2+y^2+z^2\to\infty} x+y+z \to f(x,0,0) = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty \Rightarrow$ il limite N.E.

$f(-x,0,0) = -x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

- Sia $D_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le x,\ z\le 0\}$

$f(y,y,0) = 2y \to +\infty \Rightarrow$ limite N.E

$f(0,0,-z) = -z \xrightarrow[z\to+\infty]{} -\infty$

- Sia $D_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le y\le 2,\ 0\le x\le z\}$

$f(0,1,z) = 1+z \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow$ limite è $+\infty$

$f(z,2,z) = 2z+2 \xrightarrow[z\to+\infty]{} \infty$ No non puoi calcolare il limite solo su due curve e dire che esiste

- Sia $D_3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\ge 1\}$

$f(0,0,z) = z \xrightarrow[z\to\infty]{} +\infty$

$f(x,0,x) = 2x \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty \Rightarrow$ il limite non esiste.

$f(0,0,1) = 1$ Questo proprio no, qui chi tende all'infinito?!

- Sia $D_4 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le y\le z\le x\}$

$f(x,1,x) = 2x+1 \to +\infty \Rightarrow$ il limite è $+\infty$

$f(z,z,z) = 3z \to +\infty$ Anche qui no, v. sopra

$D_5 =$ ...

- $f($ ...

Sia ...

Si ...

S ...

- $D_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, \ 0 \leq y \leq z \leq 1/x\}$

$f(1, 0, z) = 1 + z \to \infty$

$f(1, z, z) = 1 + 2z \to +\infty$ $\Rightarrow$ il limite è $+\infty$

$f(x, 0, \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ No, vedi sopra

- $f(x,y,z) = x^4 - y^2 + z^2$ su $\mathbb{R}^3$

$f(x, 0, 0) = x^4 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $\Rightarrow$ il limite non esiste

$f(0, y, 0) = -y^2 \xrightarrow[y \to \infty]{} -\infty$ Testo

Sia $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x, \ z \leq 0\}$

$f(x, 0, 0) = x^4 \to +\infty$

$f(x, x, 0) = x^4 - x^2 \to +\infty$ No vedi sopra $\Rightarrow$ il limite è $+\infty$

$f(0, 0, -z) = z^2 \to +\infty$

Sia $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq 2 \quad 0 \leq x \leq z\}$

$f(0, 1, z) = z^2 - 1 \xrightarrow[z \to \infty]{} +\infty$

$f(z, 2, z) = z^4 - 2 + z^2 \xrightarrow[z \to \infty]{} +\infty$ $\Rightarrow$ il limite è $+\infty$

No vedi sopra

Sia $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 1\}$

$f(0, 0, 1) = 1$ No, vedi prima

$f(x^4, 0, 0) = x^4 \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$ $\Rightarrow$ N.E

- $D_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq z \leq x\}$

$f(x, 1, x) = x^4 + x^2 \to \infty$

$f(z, z, z) = z^4 - z^2 + z^2 \xrightarrow[z \to \infty]{} \infty$

E quindi?

di min locale.

ESERCIZIO PAG 80

- $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2y^2$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x + 6y^2 & 12xy \\ 12xy & -6y + 6x^2 \end{pmatrix}$$

NOTA

$f_x = 3x^2 + 6xy^2 \to f_{xx} = 6x + 6y^2$

$f_{xy} = 12xy \qquad f_y = -3y^2 + 6x^2y \to f_{yy} = -6y + 6x^2$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 3x^2 + 6xy^2 = 0 \\ -3y^2 + 6yx^2 = 0 \end{cases} \to \text{se } y = 0 \to x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{se } x \neq 0 \\ y = 2x^2 \text{ e} \\ 3\cancel{x^2} + 24x^{\cancel{5}\,3} = 0 \to 8x^3 = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Punti sono $A \equiv (0,0)$ $\quad B \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$A \equiv (0,0) \to H_f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ guardo f

$f(0,y) = -y^3 \to$ massimo

Analisi 1!!!!!

$f(x,0) = x^3 \to$ minimo

$\Downarrow$ SELLA

$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow H_f \begin{pmatrix} -3/2 & -3 \\ -3 & -3/2 \end{pmatrix} \to \det = \frac{9}{4} - 9 = \frac{9-36}{4}$ indef

$tr = -3$

$\Downarrow$

SELLA

- $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$

DERIVATE $\rightarrow f_x = 2x - 2xy^2 \rightarrow f_{xx} = 2 - 2y^2$

$f_{xy} = -2xy$

$f_y = 2y - 2yx^2 \rightarrow f_{yy} = 2 - 2x^2$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2-2y^2 & -2xy \\ -2xy & 2-2x^2 \end{pmatrix}$$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 2x - 2xy^2 = 0 \\ 2y - 2yx^2 = 0 \end{cases}$$

se $x = 0 \Rightarrow y = 0$

se $x \neq 0 \Rightarrow 1)\ \cancel{x} = \cancel{x}y^2 \rightarrow y = \pm 1$

$y = -1 \rightarrow -2 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \pm 1$

$y = +1 \rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \pm 1$

I punti sono $A \equiv (0,0)$ $B \equiv (-1, 1)$ $C \equiv (-1,-1)$ $D \equiv (1,1)$ $E \equiv (1,-1)$

$H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = 4$, $tr = 4$ $\Rightarrow H_f$ def. positiva $\Rightarrow (0,0)$ minimo locale

$H_f(E) H_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = -4$, $tr = 0$ $\Rightarrow H_f$ indefinito $\Rightarrow$ SELLA

$H_f(D) H_f(C) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = 4$, $tr = 0$ $\Rightarrow H_f$ $\Rightarrow$

Segno sbagliato

- $\sin(x+y) = x+y - \frac{(x+y)^3}{6} + o((x+y)^3)$

Poiché il termine del primo ordine è presente allora il gradiente calcolato nell'origine non è nullo quindi non è stazionario

ESERCIZI PAG 80 - C+1151

• Classificazione di punti stazionari della funzione:

$f(x,y) = x + x^2 + y^4$ su $\mathbb{R}^2$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 1+2x=0 \\ 4y^3=0 \end{cases} \rightarrow y=0 \qquad x=-1/2 \quad y=0$$

$A(-1/2, 0)$

MATRICE HESSIANA

$$H_f \begin{pmatrix} \overset{f_{xx}}{2} & \overset{f_{xy}}{0} \\ \underset{f_{yx}}{0} & \underset{f_{yy}}{12y^2} \end{pmatrix} \qquad H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_f(A)$ è semi def. positiva

$\Rightarrow A$ è punto di minimo locale

No così escludi solo che sia max locale

STUDIO PUNTI DI MAX/MIN GLOBALE

Siccome è definita su tutto il piano allora studio il suo comportamento all'infinito

$$f(x,0) = x + x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} \infty \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$$

$$f(0,y) = y^4 \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$$

$\Rightarrow$ ho $\min_{\mathbb{R}^2} f$

Per usare WG devi dimostrare che il limite è + infinito e non bastano due curve

W.G.

Il minimo è un punto stazionario

• $f(x,y) = xe^y - ye^x$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^y - ye^x = 0 \rightarrow e^y - yxe^y = 0 \rightarrow e^y(1-yx)=0 \\ xe^y - e^x = 0 \rightarrow e^x = xe^y \end{cases}$$

$x=0 \Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni

$x \neq 0 \rightarrow x = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow$ ho il punto $(1,1)$

$\Rightarrow A = (1,1)$

Questa implicazione è vera, ma non dimostrata: devi sostituire y = 1/x ad esempio nella seconda equazione e studiare la funzione di una variabile che ottieni oppure fare qualche altra manipolazione del sistema da cui dedurre y = x e positivi

Testo

$$H_f = \begin{pmatrix} e^y - ye^x & e^y - e^x \\ e^y - e^x & xe^y - e^x \end{pmatrix}$$

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f(A)) = \quad \mathrm{Tr} = 0$$

$\Rightarrow$ la matrice è nulla allora non so dire niente

No, non funziona la matrice Hessiana, devi cambiare metodo

$f(x,y) = x \arctan y + y \arctan x$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} \arctan y + y \dfrac{1}{1+x^2} = 0 \\ x \dfrac{1}{1+y^2} + \arctan x = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione $(0,0)$

Perché? va dimostrato che non ci sono altre soluzioni

$$Hf = \begin{pmatrix} \arctan y - \dfrac{2y\,x}{1+x^2} & \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+x^2} \\ \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+x^2} & -\dfrac{2xy}{1+y^2} + \arctan x \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice nulla non so oltre niente

Anche qui: se fosse vero dovresti cambiare metodo, in realtà hai sbagliato il calcolo dell'Hessiana in (0,0), prova a fare lo sviluppo di Taylor e te ne accorgi!

STUDIO MAX/MIN GLOBALI

$f(x,x) = x \arctan(x) + x \arctan(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ $\quad \sup = +\infty$

$f(0,y) = 0$

$f(+x,-x) = x \arctan(-x) - x \arctan x =$

$= -2x \arctan(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$ $\quad \inf = -\infty$

ESERCIZIO PAG 81 (SVILUPPI DI TAYLOR)

Sviluppa fino all'ordine 4:

Vero, ma magari fai un passaggio in più…

- $\sin(x+y^4) = x+y^4 - \frac{x^3}{3!} + o((x+y^4)^4)$

$$= x+y^4 - \frac{x^3}{3!} + o((x^2+y^2)^2)$$

Il termine al primo ordine è presente questo significa che il gradiente non si annulla $\Rightarrow$ il punto non è stazionario

- $\sin(x^2+y^3) = x^2+y^3 + o(x^2+y^3)^4$

questa è falsa

$$= x^2+y^3 + o(x^2+y^2)^2$$

questa è vera, devi sistemare la prima ugualianza

In questo caso $(0,0)$ è un punto stazionario

$f(x,0) = x^2 + o(x^4) \rightarrow f$ ha minimo in 0

$f(0,y) = y^3 + o(y^4) \rightarrow$ non è né max né min.

Questa è falsa, occhio agli o-piccoli, fai i passaggi per bene

- $\exp(xy+y^3+x^4) = 1 + xy + y^3 + x^4 + \frac{x^2y^2}{2} + o(xy+y^3+x^4)^4$

$$= 1 + xy + y^3 + x^4 + \frac{x^2y^2}{2} + o(x^2+y^2)^2$$

In questo caso $(0,0)$ è stazionario ma

$f(x,0) = 1+x^4$ e $(0,0)$ è un punto di min

$f(0,y) = 1-y^3$ e $(0,0)$ non è né max né min.

devi mettere anche gli o-piccoli (e corretti)