

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 31 Dicembre 2013

1. Consideriamo in \mathbb{R}^3 i punti $A = (2, -1, 2)$ e $B = (2, 3, 0)$.
 - (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene A e B e non interseca la retta passante per l'origine e per $(1, 1, 1)$.
 - (b) Siano C e D punti appartenenti al piano precedente e tali che $ABCD$ sia un quadrato. Determinare le possibili coordinate di C e D .
2. Sia r la retta del piano che passa per $A = (-1, 3)$ e per $B = (3, 4)$.
 - (a) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r' che passa per B , ha coefficiente angolare positivo, e forma con r un angolo θ tale che $\cos(\theta) = 3/5$.
 - (b) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r'' , simmetrica di r rispetto ad r' .
 - (c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad r' e poi la simmetria centrale rispetto ad A .

3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che la matrice A è simile alla matrice B .
 - (b) Nei casi in cui A è simile a B , determinare una matrice invertibile M che realizza la similitudine.
4. Sia $V = \text{Span}\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$ lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari delle cinque funzioni indicate.
 - (a) Dimostrare che la funzione $\sin^2 x$ appartiene a V .
 - (b) Dimostrare che la formula

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

rappresenta un prodotto scalare definito positivo in V , e determinare quindi una base ortonormale rispetto a tale prodotto.

- (c) Dimostrare che la formula $f(x) \rightarrow f'(x)$ definisce un'applicazione lineare da V in V , e determinare gli autovalori (eventualmente complessi) di tale applicazione lineare.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.