Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 24 Marzo 2018

1. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y) = (x^3 - x + 3x^2y - y^4, y^3 - y + 3xy^2 - x^4) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Dimostrare che esiste una successione $(x_n, y_n) \to (0,0)$ che per n sufficientemente grande soddisfa l'uguaglianza

$$F(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \sin\frac{1}{n}\right)$$

   e che due qualunque successioni con queste due proprietà coincidono definitivamente.

   (b) Determinare la parte principale della successione $x_n - 2y_n$.

   (c) Stabilire se la funzione $F(x,y)$ è surgettiva.

   (d) Stabilire se la funzione $F(x,y)$ è iniettiva.

2. Consideriamo l'insieme

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + \arctan^2(xyz^2) = 7\}.$$

   (a) Dimostrare che S è una superficie compatta e connessa di classe C^∞.

   (b) Consideriamo la superficie

$$\widehat{S} = \{(x,y,z) \in S : y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

   e il campo di vettori

$$\vec{E} = \left(\sin^2 x + \arctan(yz), z^2 + y, x^3y - z\right).$$

   Determinare il flusso di $\vec{E}$ attraverso $\widehat{S}$ orientata in maniera uscente rispetto all'origine.

   (c) (Bonus question) Consideriamo, al variare del parametro reale a, la forma differenziale

$$\omega_a = \frac{-z-a}{x^2 + (z+a)^2}\,dx + \frac{1}{(y+a)^2 + a^4}\,dy + \frac{x}{x^2 + (z+a)^2}\,dz.$$

   Studiare, al variare di a, l'integrale di ω_a lungo il bordo di $\widehat{S}$, considerato con l'orientazione indotta dall'orientazione assegnata precedentemente a $\widehat{S}$.