IL FIBONACCI N. 8

BREVE VIAGGIO FRA CURIOSITÀ MATEMATICHE

In occasione della XX Gara Nazionale di Matematica — Cesenatico, 7-9 maggio 2004

In occasione della XX Olimpiade nazionale della Matematica appare per l'ultima volta "Il Fibonacci", giornale murale che si propone di stimolare curiosità su aspetti insoliti o nascosti della matematica e si rivolge a tutti coloro che trovano gusto nell'affrontare problemi matematici anche complessi.
Con la prematura scomparsa del suo ideatore, disegnatore e compositore Franco Conti non è più pensabile di proseguire la serie. Tutti noi, amici e collaboratori, dedichiamo questo numero alla sua memoria.

LA CONGETTURA DI CATALAN — 8.1

Nel 1844 E. Catalan pubblicò sulla rivista scientifica *Crelle* la seguente congettura: "L'equazione diofantea $x^m - y^n = 1$, dove x, y, m, n sono numeri naturali maggiori di 1, ha per unica soluzione $x = 3, m = 2, y = 2, n = 3$." ($3^2 - 2^3 = 1$).
Solo recentemente, nel 2002, la congettura di Catalan è stata dimostrata completamente dal matematico Pedra Mihajelscu. La sua dimostrazione è piuttosto complessa ed è difficile anche solo accennarvi. Se però si prendono in esame dei casi particolari, è possibile giungere a risultati significativi usando delle idee relativamente semplici. Il caso particolare che proponiamo al lettore risulta, con il senno di poi, anche quello più interessante: si tratta di considerare l'equazione proposta da Catalan con la restrizione che le "basi" x e y siano 2 e 3.
Sapreste dimostrare che l'unica soluzione dell'equazione diofantea $2^m - 3^n = 1$, in cui m, n sono interi maggiori di 1, è $m = 3, n = 2$? Sapreste inoltre dimostrare che l'equazione diofantea $3^m - 2^n = 1$ non ha nessuna soluzione (con m, n maggiori di 1)?

LA FORMULA SEGRETA DI FIBONACCI — 8.2

In un manoscritto del *Liber Abaci* recentemente sottoposto ad accurato restauro, gli studiosi hanno fatto una imbarazzante scoperta: in una pagina ripiegata e incollata si trova ben chiara la formula

$$\int Fg = FG - \int fG$$

L'interpretazione ingenua direbbe che qui si svela la scoperta del calcolo integrale, ed in particolare la regola d'integrazione per parti. Ma perché non c'è alcuna traccia di applicazioni di una così importante scoperta nelle opere del grande matematico pisano? Che la spiegazione si trovi in due righe cancellate e riapparse solo sotto un'illuminazione laser di tipo mai provato prima?

$$F = \frac{3}{\sin x} \qquad g = 3\cos x$$

$$??? \ 0 = 9 \ ???$$

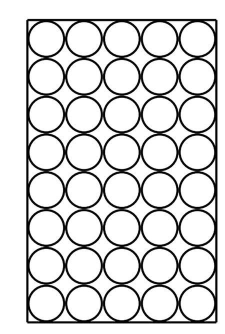
Tutta la questione è attualmente fonte di accesissime dispute che coinvolgono filologi, storici, matematici (e falsari) ...
Noi ci limitiamo a trarne un'ineludibile conseguenza per il nostro giornale murale: avendo già pubblicato i numeri $0, 1, 2, \ldots, 8$, se davvero Fibonacci ha dimostrato che $0 = 9$, non ci resta che lasciare che i numeri successivi si ripresentino circolarmente all'infinito!

CHI MI SALVA IN TAL PERIGLIO — 8.3

Catturato da feroci pirati durante un viaggio nei mari della Malesia, il logico e prestigiatore Raymond Smullyan si trovò ad affrontare un difficile dilemma. Il capo dei pirati gli disse: "Hai diritto di fare una sola affermazione: se questa risulterà falsa sarai impiccato, se invece risulterà vera, non potrai essere impiccato, ma dovrai firmare una delega irrevocabile che consegna a me tutti i tuoi stipendi e i diritti sui tuoi libri."
Certamente tutti voi siete in grado di aver salva la vita, ma riuscireste anche a salvare le vostre fonti di sussistenza?

UNA LATTINA IN PIÙ... — 8.4

Una cassa rettangolare è piena di 40 lattine come in figura. Sapreste infilare una quarantunesima lattina nella stessa cassa?

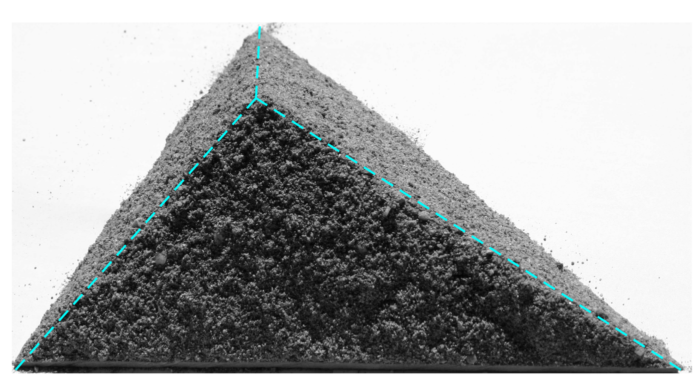


IL SEGRETO DEL PERIODO PARI — 8.5

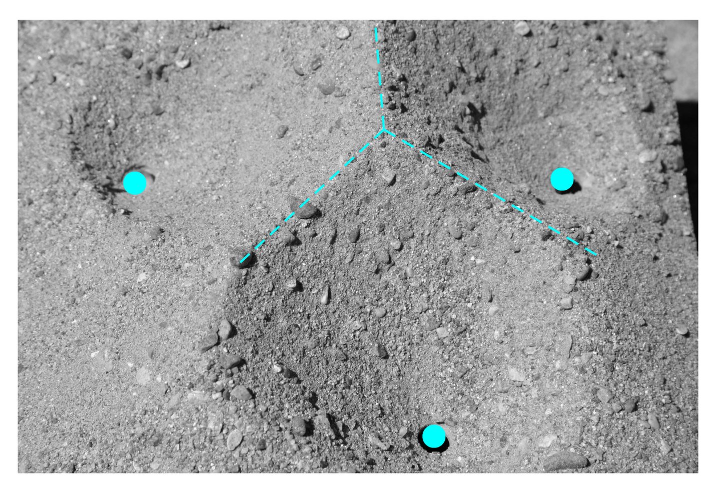
Se si scrive $\frac{1}{7}$ in forma decimale, si ottiene $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$. Cioè, lo sviluppo decimale è periodico ed il gruppo di 6 cifre 142857 si ripete all'infinito. Ci sono molte particolarità sul numero 142857, tra le quali quella che, se lo si scinde a metà formando i due numeri di 3 cifre 142 e 857, si ha la relazione $142 + 857 = 999$. Ebbene, non è un caso. Considerate un numero PRIMO p e scrivetelo in forma decimale. La scrittura risulterà periodica, ed un certo gruppo di m cifre (dove m dipende da p) si ripeterà all'infinito. Supponete ulteriormente che m sia un numero pari, (si può dimostrare che questo accade per infiniti numeri primi p) e scindete a metà il numero di $m = 2n$ cifre che si ripete all'infinito, ottenendo due numeri A, B di n cifre ciascuno (contando anche eventuali zeri iniziali).
Ebbene, si ha sempre $A + B = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ volte}}$!

TRIANGOLI SABBIOSI — 8.6

Supponiamo di avere un tavolino con il piano di forma triangolare, sul quale versiamo una grande quantità di sabbia, fino a quando non ce ne sta più. Vedremo allora che si è formato una specie di tetto, con i tre spioventi che partono dai tre lati del tavolino con una pendenza che dipende dalle caratteristiche della sabbia che abbiamo usato. Il tetto ha dunque la forma di una piramide a base triangolare. Dove cade la proiezione del vertice sul piano del tavolino? Per rispondere, indichiamo con V il vertice, con H la sua proiezione sulla base, e con A', B', C' le proiezioni di H sui lati del triangolo base. Ora VHA', VHB', VHC' sono triangoli rettangoli con un lato in comune (l'altezza della piramide) e l'angolo opposto uguale (si tratta infatti dell'angolo che gli spioventi formano con la base): di conseguenza i triangoli sono congruenti ed in particolare $HA' = HB' = HC'$. Il punto H, essendo equidistante dai lati, è quindi l'*incentro* della base.

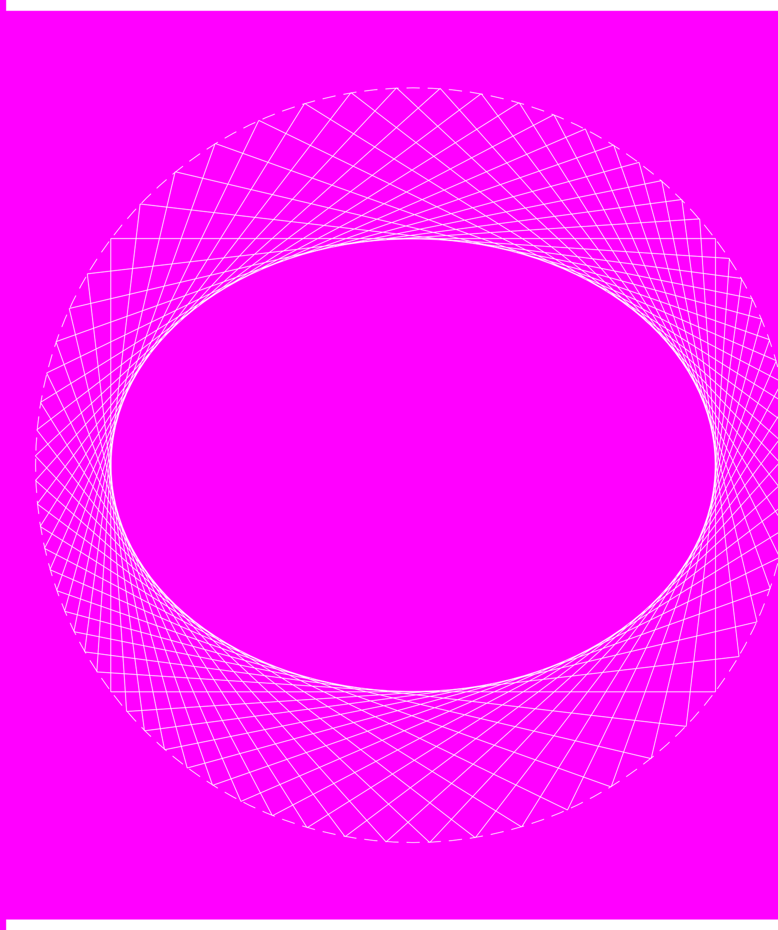


Anche il *circocentro* di un triangolo può essere visualizzato mediante una costruzione analoga. Prendiamo un tavolino qualunque, anche rettangolare, e supponiamo di praticare tre piccoli fori in corrispondenza del triangolo che vogliamo considerare. Ancora una volta, riempiamo di sabbia fino a quando ce ne sta. Uscendo dai fori praticati, la sabbia formerà questa volta tre crateri conici, con il vertice corrispondente ai fori stessi. Consideriamo ora le linee spartiacque tra i crateri: proiettandole sulla base, si ottengono tre semirette uscenti dal circocentro e corrispondenti agli assi del triangolo.



PUNTI DI VISTA... — 8.7

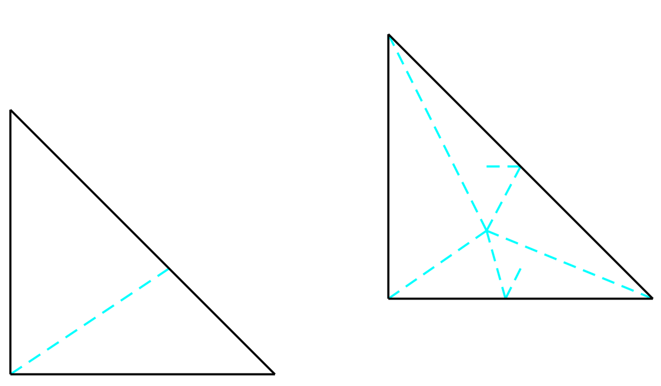
Il luogo dei punti che vedono un'ellisse da un angolo retto (ovvero, tali che le due tangenti condotte da essi all'ellisse siano tra loro perpendicolari) è una circonferenza. La verifica di questo fatto, più o meno sorprendente, può essere svolta, per esempio, mediante la geometria analitica, ed è interessante dal punto di vista didattico se si fa attenzione a non svolgere più calcoli del necessario.



In modo analogo, si può verificare che l'insieme dei punti che vedono una parabola da un angolo retto è una retta, e non è altro che la direttrice stessa della parabola. Cosa succede invece nel caso dell'iperbole?

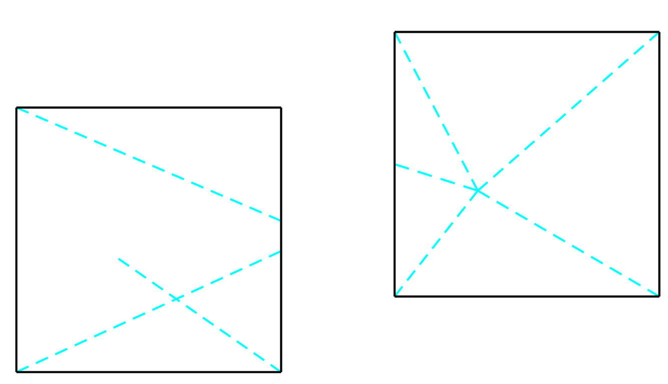
TASSELLAZIONI ACUTANGOLE — 8.8

Qual è il minimo numero di triangoli acutangoli in cui è possibile suddividere un triangolo rettangolo (o ottusangolo)?
Per cominciare, bisogna che ci sia un vertice interno, perché altrimenti per dividere l'angolo retto produciamo un altro triangolo non acutangolo.



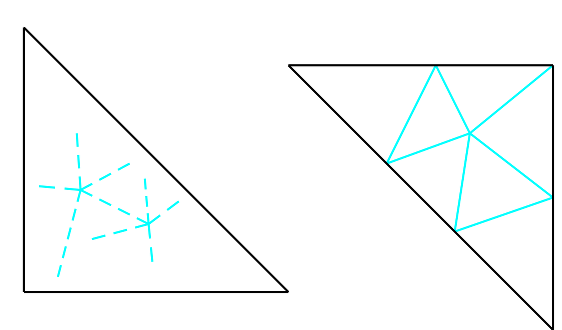
Da un vertice interno devono partire almeno 5 segmenti: almeno due di essi arrivano su un lato e producono almeno due angoli non acuti, da dividere con almeno altri due segmenti. Ci sono quindi almeno $5 + 2$ segmenti interni e almeno 5 segmenti sul bordo. I segmenti interni contano per due triangoli, quindi abbiamo almeno $7 \cdot 2 + 5 = 19$ lati, cioè almeno 7 triangoli. Con più di un punto interno si arriva ad almeno 9 triangoli.

Cosa succede per il quadrato?

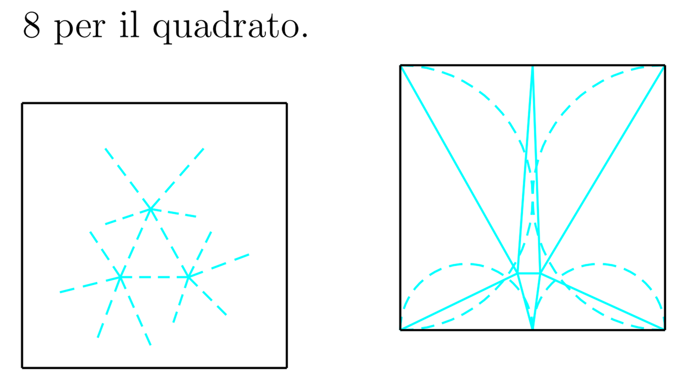


I segmenti che dividono tre angoli retti si intersecano per forza, quindi c'è almeno un punto interno. Se fosse uno solo, 4 segmenti lo collegherebbero ai vertici e uno finirebbe su un lato, producendo un triangolo non acutangolo, per dividere il quale servono come detto almeno 7 triangoli, il che porta il totale almeno a 11. Se ce ne sono 2, il numero di segmenti interni è almeno 9 e il totale dei lati è almeno $9 \cdot 2 + 4 = 22$, cioè ci sono almeno 8 triangoli. Con più di due punti interni, si hanno almeno 26 lati (9 triangoli).

Ecco 7 tasselli per il triangolo.



8 per il quadrato.



DIVINO, DIABOLICO? ... MATEMATICO! — 8.9

Prendete in un giornale un articolo qualsiasi, e fra le prime righe scegliete una parola qualsiasi e sottolineatela.
Contate di quante lettere è formata questa parola e avanzate nel testo di tante parole quante sono queste lettere. Sottolineate la nuova parola a cui arrivate e proseguite con la stessa regola finché potete. Naturalmente non considerate i segni di interpunzione. Vi accorgerete che, praticamente sempre, l'ultima parola sottolineata non dipende dalla scelta iniziale.
Trovate che tutto questo sia divino, diabolico o sia più semplicemente matematico?
Provate anche con questo articolo.

NUMERI PRIMI CON LE CIFRE UGUALI — 8.10

È 11 l'unico numero primo che si scrive ripetendo sempre la stessa cifra? La risposta è negativa, ma questi primi sono molto rari, infatti fra tutti i numeri maggiori di 11 che si scrivono con meno di 1000 cifre ci sono solo 3 numeri del tipo desiderato, precisamente quelli formati da 19, da 23 e da 317 cifre 1. Non è noto se ne esistano un numero finito o infinito. È ovvio che un numero del tipo richiesto è necessariamente costituito da cifre tutte uguali a 1; inoltre il numero delle cifre deve essere a sua volta un numero primo, perché si ha

$$\frac{10^{ab}-1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{ab \text{ volte}} = \frac{10^a - 1}{9}\left(10^{a(b-1)} + 10^{a(b-2)} + \cdots + 10^a + 1\right).$$

PROBLEMI DA RISOLVERE — 8.11

1) Siete in grado di suddividere i novanta numeri della tombola (da 1 a 90) in 5 sacchetti di 18 ciascuno in modo che, se qualcuno ne estrae due a caso dallo stesso sacchetto e vi comunica l'ultima cifra della loro somma, voi possiate dire da che sacchetto sono state estratte?

2) Dimostrare che ogni numero razionale positivo può essere rappresentato nella forma

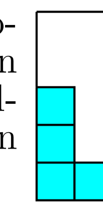
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}$$

dove $a_1, a_2 \ldots, a_n$ sono interi positivi distinti.

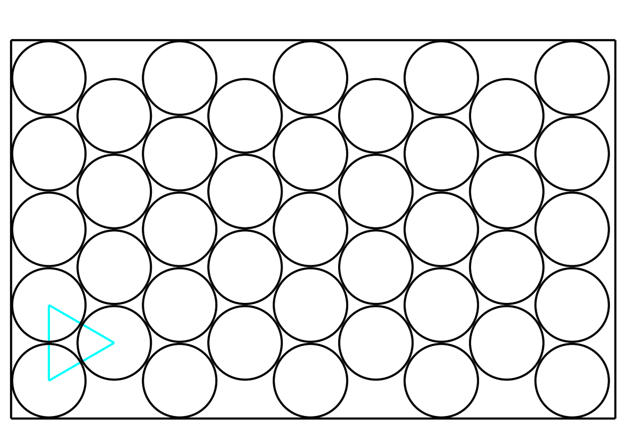
3) Abbiamo un $n-$agono regolare e a turno un giocatore traccia un lato o una diagonale tra due vertici non già collegati. Il gioco finisce quando ciascun vertice è collegato ad almeno un altro vertice. Per quali valori di n il primo giocatore ha una strategia vincente?

4) È possibile dividere in due parti i numeri da 1 a 2004 in modo che nessuna delle due parti contenga due numeri che differiscono di 2?

5) Quali rettangoli possono essere piastrellati con piastrelle a forma di L (altezza 3, base 2) come in figura?



SOLUZIONE DEL QUESITO 8.4



$$8\sqrt{3} + 2 < 16$$

A cura di M. Barsanti, R. Dvornicich, M. Forti, T. Franzoni, M. Gobbino, S. Mortola, L. Pernazza, M. Romito.

Stampato in proprio dal Centro Stampa della S.N.S. – Pisa